Aansluiting van de tweede graad op het nieuwe leerplan in de eerste graad A-stroom

April 2011

Sinds 1 september 2009 wordt in de eerste graad A-stroom een nieuw leerplan wiskunde gebruikt. Deze bundel wil enerzijds de leraren van de 2de graad informeren over dit nieuwe leerplan en anderzijds ook inspireren om de krachtlijnen in dit leerplan te continueren in de tweede graad.
Deze bundel kan gebruikt worden bij het overleg tussen de 1ste graad A-stroom en de 2de graad.

Inhoudsopgave

1 Waarom een nieuw leerplan wiskunde[1] in de eerste graad A ?

Twee factoren hebben bijgedragen tot het ontstaan van het nieuwe leerplan wiskunde: enerzijds een actualisering van het vorige leerplan (2005-2007) en anderzijds de visietekst van het VVKSO op de eerste graad.
In 2004-2005 werden de leraren van de 1ste graad A-stroom bevraagd over de beginsituatie van de leerlingen (vanuit de basisschool), over de haalbaarheid van het leerplan 1997, over het eventueel niet afwerken van leerstofonderdelen voor bepaalde leerlingengroepen, over de vaardigheden (rekenvaardigheden, meet- en tekenvaardigheden, denk- en redeneervaardigheden, taalvaardigheden en probleemoplossende vaardigheden), over de vakgebonden attitudes (nauwkeurigheid, zelfvertrouwen, doorzetting, kritische zin en reflectie).

De belangrijkste problemen die gesignaleerd werden:

1. De doelstellingen van de basisschool zijn vaak niet bereikt.
2. In sommige klassen is het leerplan van de eerste graad niet haalbaar.
3. Er is weinig zin voor nauwkeurigheid en orde.
4. Leerlingen hebben vaak te weinig doorzettingsvermogen.

Op de gesignaleerde problemen hebben we dan een antwoord proberen te bieden door een actualisering van het leerplan met onder meer voorstellen over de didactische aanpak (leerling-actieve werkvormen, contextgericht werken, getrapte aanpak, differentiatie …), over het gebruik van leermiddelen i.h.b. van ict, over evaluatie (meer aandacht voor procesevaluatie) en over de oriëntering van leerlingen.

In de visietekst[2] van het VVKSO op de eerste graad is de centrale gedachte de optimale begeleiding van de 12- tot 14-jarige in zijn of haar groei. De eerste graad vervult een duidelijke brugfunctie tussen de basisschool en de oriëntering van elke leerling naar de tweede graad.

In die visietekst wordt aandacht gevraagd voor:
- aansluitende leerplannen, voornamelijk wat terminologie en aanpak betreft;
- leerplannen die rekening houden met kwalitatieve differentiatie. Bij kwalitatieve differentiatie wordt er door de keuze en de formulering van de leerplandoelstellingen gefocust op het beheersingsniveau van de leerinhouden en gaat het dus niet over het extra aanbieden van leerinhouden.

[1] Wiskunde, eerste graad – leerplan secundair onderwijs, september 2009, VVKSO-Brussel D/2009/7841/003
[2] Werken in de eerste graad M-VVKSO-2005-158 (http://ond.vvkso-ict.com/vvksosites/UPLOAD/2005/M-VVKSO-2005-158.pdf)

2 Wat is wiskundevorming?

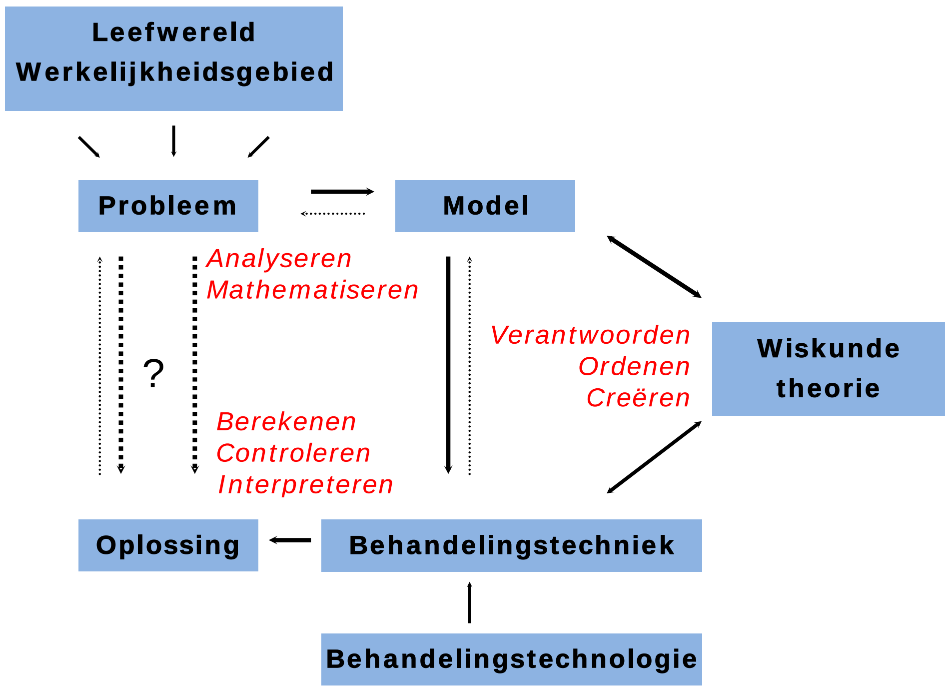
In de wiskunde creëren we modellen om de werkelijkheid rondom ons te beschrijven.

- Met de werkelijkheid bedoelen we hier o.a. natuurverschijnselen (ruimte, beweging, kracht ...), technische realisaties (elektronica, informatietechnologie …) of menselijke relaties (economie, sociologie …).
- De modellen zelf kunnen bijv. de vorm aannemen van een evenredigheid, een formule, een vergelijking, een functioneel verband, een meetkundig verband.

Bovendien ordent de wiskunde die modellen in samenhangende systemen en schema's, waarbij ook de toepasbaarheid en de beperkingen van die systemen kunnen beschreven worden.

2.1 Wiskundegebruik versus wiskundetheorie, een valse tegenstelling?

Het model waarmee in de leerplannen VVKSO naar wiskunde wordt gekeken bestaat in hoofdzaak uit twee luiken: een luik over het gebruik van wiskunde en een luik over theorievorming.



In *het gebruikersluik* (de linkerkant van het schema) gaat het om het gebruik van wiskunde in allerlei situaties, de wiskunde in haar toepassingen. Hierbij worden belangrijke wiskundige vaardigheden ontwikkeld en gaat heel wat aandacht naar belangrijke opvattingen als strategische en methodische aanpak. Vaardigheden die worden ingezet: het analyseren, het mathematiseren, het berekenen, het interpreteren van resultaten, het gecontroleerd terugkijken op het hele verwerkingsproces.
Hieraan gekoppeld wordt inzicht meegegeven in het leerproces van wiskunde maar ook in het leren in het algemeen. Het verwerven van een concept via voorbeelden en tegenvoorbeelden, via een expliciteringproces van kenmerkende eigenschappen en met een stijgend niveau aan verwoording (en voor wiskunde ook symbolisering) kan model staan voor alle leren. Het analyseren van (mathematiseren) en interpreteren in (demathematiseren) bepaalde contextsituaties kan model staan voor het gebruiken van opgebouwde kennisschema's. Het verwerven van de vaardigheid om juiste berekeningen uit te voeren kan gemotiveerd worden vanuit de noodzakelijke toepassing ervan

om tot een oplossing te komen.
Het tweede luik (de rechterkant van het schema) gaat over *de wiskundetheorievorming*. De veelheid aan verworven concepten, eigenschappen, technieken … kunnen maar behoorlijk functioneren in goedgeordende kennisschema's. Wiskunde stelt de vraag naar veralgemening en naar verklaring en verantwoording van eigenschappen, regels en samenhang. Hier wordt de basis gelegd voor wiskundige theorievorming. Wiskunde probeert niet alleen de vraag te beantwoorden dát het zo is (dat het een oplossing is, dat het een eigenschap is), maar ook die waaróm het, binnen het systeem, zo is.
Deze denkwijze impliceert een andere aanpak van het leerproces dan louter overdragen van een afgewerkt systeem. Wiskundekennis wordt dan niet overgedragen als een a priori afgewerkt geheel. Bij het leren van wiskunde moet tijd uitgetrokken worden voor het moeizame, tijdrovende werk van het opbouwen en structureren zelf. Dit is wat wiskundigen doen: modellen zoeken of uitbreiden en de werking ervan verantwoorden en ze terug brengen of verantwoorden vanuit de voorhanden zijnde kennis. Zoals abstraheren geleerd wordt door een proces van betekenisvolle begripsvorming, zo wordt structureren maar geleerd in het proces van structureren, en niet door structuren zonder reflecteren over te nemen. De leerlingen confronteren met deze 'constructieve en creatieve houding' van bij het begin lijkt meer resultaat te zullen opleveren dan het overdragen van afgewerkte gehelen. Dit betekent niet dat leerlingen alles zelf moeten ontdekken.

Krachtige instrumenten in deze tweeluikvisie zijn de ontwikkeling van betekenisvolle concepten (begrippen, eigenschappen, regels, verbanden …) en de samenhang ervan, het leren modelleren en het verantwoorden van wat je doet en zegt.

De kracht van het systeem ligt in het ontwikkelen van niet onbelangrijke probleemoplossende vaardigheden (zowel voor gebruik buiten als binnen de wiskunde), die rechtstreeks en onrechtstreeks bijdragen in het ontwikkelen van onderzoeksvaardigheden en leervaardigheden. In een tijd waarin levenslang leren meer en meer een fundamentele optie is voor de onderwijsvorming is het onmogelijk hieraan in het so geen aandacht te besteden.

In het deelschema van de gebruiker is er een onderdeel dat verwijst naar verwerkingstechnologie, zeg maar het gebruik van rekenmachine en software om aan de resultaten te komen. Het inzetten van deze middelen is zinvol als het wiskundig doel op een ander vlak ligt dan de verwerving van rekenvaardigheid, bijv. bij het oplossen van vraagstukken met 'realistische' getallen. Wat dan weer niet betekent dat bij vraagstukken met eenvoudige berekeningen zomaar de rekenmachine moet ingezet worden.

De vormingspakketten van de verschillende studierichtingen worden samengesteld door verschillende combinaties van deze beide 'vormingscomponenten'.
Dat betekent enerzijds dat de vorming van het sterk wiskundig pakket duidelijk meer elementen bevat van theorievorming en hogere eisen stelt aan de toepassingsgerichte vaardigheden. Dat betekent anderzijds dat een minder sterk pakket meer gebruikerselementen bevat, met inbegrip van een minder hoog beheersingsniveau van de rekenvaardigheden. Er wordt voorrang gegeven aan de vorming van betere inzichten in de concepten, in redeneervermogen, in probleemoplossende vaardigheden.

2.2 Competentiedenken

Verder is de leerplanvisie gebaseerd op documenten die de Pisa-toetsen van de OESO[3] ondersteunen. Daarin worden voor wiskunde een aantal competenties geformuleerd.
Het gaat om een achttal breed geformuleerde wiskundige competenties die aansluiten bij een aantal algemene competenties en de gedachte dat leerlingen best zelf die competenties ontwikkelen,

[3] OESO, Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling

waarbij de verschillende aspecten van kennis, vaardigheden, attitudes en opvattingen geïntegreerd worden.

Enerzijds gaat het over competenties betreffende het vermogen (en de bekwaamheid) om vragen te stellen en te beantwoorden over en met wiskunde.
De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

- wiskundig denken;
- het aanpakken en oplossen van problemen;
- het formuleren van wiskundige argumenten;
- het wiskundig modelleren van situaties.

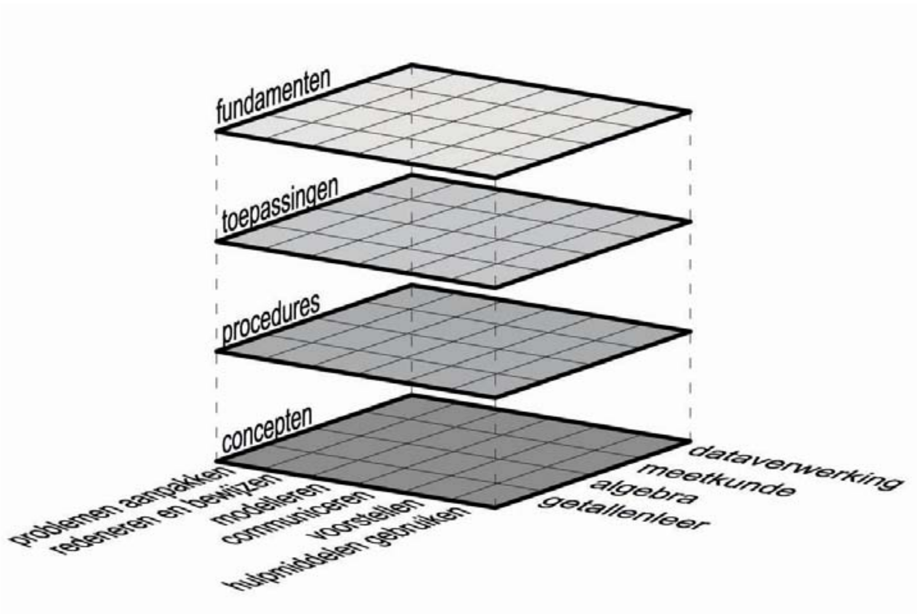
Anderzijds betreft het competenties die het vermogen aangeven om wiskundetaal en wiskundige hulpmiddelen in te zetten.
De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

- het representeren van situaties met behulp van wiskunde;
- het hanteren van een specifieke wiskundetaal (o.m. symbolen en formalisme);
- het communiceren in en met wiskunde;
- het gebruiken van hulpmiddelen.

De competenties bepalen ook het ordeningskader van de inhoudelijke doelstellingen in het leerplan. De wiskundevorming in de eerste graad is niet het eindpunt van die vorming. Ze geeft een belangrijke aanzet, maar het vormingsproces moet in de bovenbouw verder gezet worden. Daarbij heeft de leerling dan de keuze tussen een ruime en brede, meer onderbouwde wiskundevorming, waarbij wiskunde dragend vak van die vorming is, of een verdere basisvorming waarbij wiskunde hoofdzakelijk als ondersteunend vakgebied aan bod zal komen.

Meerdimensionale kijkwijzer

In actueel wiskundeonderwijs heeft het geen zin meer om uitsluitend te focussen op de inhoudelijke ordening. Daardoor gaat de kijk op de algemeen vormende aspecten van de wiskundevorming verloren.
In het schema op de volgende bladzijde wordt gewerkt met een driedimensionale kijkwijzer. Rechts beneden staan de categorieën van de inhoudelijke doelstellingen: getallenleer, algebra, meetkunde en dataverwerking. Links beneden staan de verschillende competenties. Ze vormen de vezels van een hecht raster wiskunde. Voor de duidelijkheid nemen we competenties als ‘wiskundetaal hanteren’ en ‘communiceren’ samen, en nemen we het algemenere ‘wiskundig denken’ op in de verschillende andere competenties. Merk op dat de vaardigheden, met uitzondering van de leervaardigheden, volledig zijn opgenomen in de competenties.
In verticale lagen vinden we de verschillende ontwikkelingsniveaus van wiskunde: concepten, procedures, toepassingen en fundamenten.



Het leerplan van de 1ste graad A-stroom wil wijzen op de rijkdom van elk kijkpunt uit de kijkwijzer.

Voorbeeld van de verschillende ontwikkelingsniveaus, toegepast op breuken
Concepten: leerplan p. 50

- Begrippen en eigenschappen
  bv. breuk als verdeling, als verhouding, als kans, als getal
- in betekenisvolle situaties
  bv. verdeling van figuren, verhoudingen bij recepten, kansen bij spelen

Procedures en vaardigheden: leerplan p. 54

- Geconcretiseerd in reken- en denkregels
  bv. bewerkingen uitvoeren met breuken, volgorde van bewerkingen, tekenregels, hoofdrekenen, werken met een rekenmachine, afronden

Toepassingen: leerplan p. 50

- Oplossen van problemen uit de leefwereld, uit wetenschappen en techniek
  bv. berekenen van kansen, recepten, schijfdiagrammen, hoogte bij botsing, verdeling van erfenissen, marktaandelen ...

Fundamenten: leerplan p. 67

- Samenhang
  bv. breuken ordenen op een getallenas, verband tussen breuken en decimale getallen, verband tussen optellen en aftrekken, tussen vermenigvuldigen en delen, commutativiteit, associativiteit en distributiviteit

De invalshoek vanuit competenties biedt de mogelijkheid om de vele verschillen die in de wiskundevorming (van de eerste graad) mogelijk zijn, een kader te geven. Het raster zal maar sterk zijn als voldoende onderdelen binnen voldoende competenties ontwikkeld zijn. De gelaagdheid, die gesuggereerd wordt in de ontwikkelingsniveaus van wiskunde (concepten, procedures, toepassingen en fundamenten), laat inzien dat leerlingen voor een onderdeel al op een hoger niveau kunnen functioneren en voor een ander niveau nog in de intuïtieve verkenningsfase van concepten kunnen zijn. Ook voor verschillende leerlingen in een klasgroep zijn verschillende ontwikkelingsniveaus mogelijk. Dergelijke interpretatie vraagt een flexibel leerplan en een flexibele interpretatie ervan. Dergelijke interpretatie suggereert dat uitgaande van de bestaande 'kennis' van leerlingen verschillende mogelijkheden bestaan om die te verrijken, bijv. een andere competentie of vaardigheid ontwikkelen, een andere inhoud aanpakken, een ander ontwikkelingsniveau nastreven. Een wiskundeaanpak zal dus een gedifferentieerde aanpak zijn, voortbouwend op de situatie van de leerling en zijn mogelijkheden.

Competentieontwikkeling, een werk van lange adem

De wiskundevorming streeft ernaar de fundamentele competenties bij alle leerlingen te ontwikkelen. Naargelang de keuze die de leerlingen maken voor wiskunde, zal competentieontwikkeling met wiskunde al of niet uitgebreider aan bod komen. Dat kan bijvoorbeeld in functie van de keuze die leerlingen al of niet willen maken voor wiskunde of in functie van de wiskundige onderbouw die nodig is voor hun vervolgstudie.

Noodzakelijk voor wiskundige competenties is het bezitten van een goed georganiseerde basiskennis wiskunde en een aantal technische vaardigheden (zoals bijv. reken-, meet- en tekenvaardigheid). Ze zijn noodzakelijk maar als geïsoleerde kennis of vaardigheid volstaan ze niet. Ze moeten geïntegreerd ingezet kunnen worden.
Inzicht in de ontwikkeling van competenties geeft aan dat dit maar kan in een geleidelijk ontwikkelingsproces met een groeiend beheersingsniveau in een competentie (kennis, vaardigheid, attitude). Verschillende elementen kunnen op verschillende beheersingsniveaus aanwezig zijn. Zo zullen bepaalde onderdelen voorkomen op verkenningsniveau (als lerende), andere al op een hoger wiskundig niveau (als geroutineerd gebruiker) of op een formeel niveau (als professional of expert).

Voorbeelden

- Rekenvaardigheid met getallen (hoofdrekenen, handmatig rekenen, schatten en gebruik rekenmachine) zou in de eerste graad op het expertniveau moeten aanwezig zijn.
- Bewijsvaardigheid zal in de eerste graad nog volop op verkenningsniveau functioneren.
- Bepaalde begrippen worden in de basisschool op gebruikersniveau ontwikkeld (bijv. vierkant, rechthoek, diagram, grafiek). Als deze begrippen in de verdere wiskundevorming meer formeel moeten functioneren, volstaat een dergelijke benadering niet en moet een bruikbare definitie gegeven worden.

3 Het nieuwe leerplan in de eerste graad A

Sinds 1 september 2009 moet het nieuwe leerplan wiskunde in de eerste graad A-stroom gevolgd worden. Inhoudelijk werd er aan het leerplan 1ste graad weinig gewijzigd. Dit kon ook niet omdat het leerplan de eindtermen moet omvatten en de eindtermen zijn niet gewijzigd.
De belangrijkste inhoudelijke wijzigingen zijn:

- De verzamelingenleer is vrijwel volledig verdwenen.
- Een aantal doelstellingen over hoeken komt pas in het tweede jaar aan bod.
- De b-variant van het vorige leerplan die gekoppeld was aan bepaalde basisopties, werd afgeschaft. Dit betekent bijv. dat de congruentiekenmerken van driehoeken nu voor alle leerlingen moeten behandeld worden.

De veranderingen in het leerplan slaan dan ook vooral op klemtonen die gelegd worden op de verschillende onderdelen en op de vakdidactische aanpak van die leerinhouden.

3.1 Uitdagingen binnen de eerste graad

Het huidige leerplan van de eerste graad beoogt een verhoogde aandacht voor wiskundige taal, voor het door de leerlingen zelf laten onderzoeken of ontdekken van begrippen en eigenschappen, voor teken- en meetvaardigheid, voor argumentatievaardigheid en voor probleemoplossend denken. Leerlingen krijgen in de eerste graad een aantal uitdagingen te verwerken zoals negatieve getallen en bewerkingen met negatieve getallen, het werken met letters, abstrahering en formalisering, bewijsvoering.

Het werken met letters is een hoge drempel voor heel wat leerlingen. Het leerplan omschrijft vier verschillende wijzen waarop letters in de wiskunde kunnen aangewend worden.

1 Letters als onbekenden
Dit komt voor in vergelijkingen, bijv. $6+x=10$. De letter x fungeert hier als een plaatshouder voor een (voorlopig) onbekend getal. In de basisschool kwam dit reeds voor als puntoefeningen, bijv. $6+\bullet=10$.

2 Letters in formules
Een tweede vorm van lettergebruik waar leerlingen in de basisschool al enigszins mee geconfronteerd werden is die van *letters in formules*. Zo kennen ze de formule voor de oppervlakte van een rechthoek, een driehoek en een cirkel. Vaak gebruiken leerlingen nog zogenaamde *woordformules*.

Voorbeelden
Oppervlakte rechthoek = basis x hoogte.
Interest (op jaarbasis) = uitgezet kapitaal x jaarlijkse rentevoet x aantal jaar

Dit soort woordformules is een belangrijk tussenstadium in het verwoorden van wiskundige relaties en is ook belangrijk in de wiskundetaalontwikkeling van leerlingen.
De letters, die in de formules voorkomen, staan voor een bepaalde grootheid, de hoeveelheid ervan, de grootte ... In het kader van vraagstukken wordt relatief snel gedacht aan een bepaalde waarde, die aan de grootheid in dat kader kan toegekend worden, of moet berekend worden.

Bekijken we als voorbeeld het vraagstuk: “Een kapitaal van € 5 000 wordt op een spaarrekening geplaatst tegen een rentevoet van 2,5 %. Na een half jaar neemt men het geld terug op. Hoeveel zal men uitbetaald worden?”

Bij het oplossen zal men in de formule I = k.i.t spontaan de letters vervangen door de in de opgave aangegeven waarden. De letters functioneren hier als 'bepaalde waarden', die weliswaar van situatie tot situatie verschillend kunnen zijn. De formule staat wel model voor telkens dezelfde berekening. Karakteristiek voor een dergelijk gebruik van formules is dat

- ze meestal meer dan een letter bevatten, die meestal op een of andere wijze verbonden zijn met de context,
- de geëxpliciteerde verbanden vaak lineair zijn (vertolking van recht evenredigheid) of uit omgekeerd evenredigheid voortkomen,
- er weinig tekens in voorkomen,
- en dat er vaak machten in voorkomen met kleine en positieve exponenten.

3 Letters als veranderlijken

In het voornoemde interestvraagstuk is I de 'onbekende'. Maar de situatie is zo evident dat dit nauwelijks opgemerkt wordt.

De idee van onbekende wordt gemakkelijker gezien als we de vraag zouden stellen naar een bepaalde rentevoet om een vooropgezette interest te bekomen. Dan is i de onbekende, en leidt de formule tot een "vergelijking".

Het begrip veranderlijke komt tot uiting als we bijvoorbeeld zouden vragen naar een tabel van de interesten bij verschillende beleggingstijden: t wordt dan veranderlijke.

Van onbekende komen tot veranderlijke vraagt van de leerlingen een aantal denkstappen die niet voor elke leerling weggelegd is. Bijv. een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke, $t = \frac{I}{k \cdot i}$

Het begrip veranderlijke komt voor bij verbanden (functies) tussen (maatgetallen van) grootheden.

4 Letters als veralgemeningen

Deze komen voor in formules die een formalisering zijn van definities en eigenschappen, bijv. $a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c$. De letters zijn nu plaatshouders voor willekeurige getallen.

In bijlage 1 'Werken met letters in de eerste graad A-stroom' wordt meer uitleg gegeven.

3.2 Werken met beheersingsniveaus

De eindtermen leggen voor alle leerlingen van de A-stroom in de eerste graad eenzelfde minimale wiskundige basisvorming op. Anderzijds zijn de leerlingengroepen in de eerste graad meestal nog vrij heterogeen samengesteld. Bovendien staan leerlingen op het einde van de eerste graad voor een keuze in verband met hun vervolgopleiding wiskunde.

Om aan deze brede verwachtingen te voldoen moeten bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden. Leerlingen moeten de kans krijgen op hun niveau wiskunde te verwerven. Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling, als naar de leerling met meer wiskundige mogelijkheden die vaak om meer uitdaging vraagt. Differentiëren is nodig omdat ongeveer 25 % van de leerlingen doorstroomt naar een richting met minstens 6 uur in de 3de graad. Een hoger beheersingsniveau van de leerplandoelstellingen is daar een voorwaarde, ook om de doorstroming naar het hoger onderwijs met een sterke wiskundige onderbouw te garanderen.

Daarom wordt voor sommige doelstellingen een aantal beheersingsniveaus opgenomen. De leraar vindt daarin een mogelijke gradatie of een redelijke beperking van de doelstelling, die hij in het leerproces kan volgen. Dit moet leiden tot een kwalitatieve differentiatie in de lesaanpak.

De leerplandoelstellingen zijn uitgeschreven in het leerplan. We onderscheiden drie mogelijke beheersingsniveaus. (Niet voor alle doelstellingen kunnen alle niveaus worden uitgeschreven.)

Een eerste beheersingsniveau wordt **elementair** (**E**) genoemd en betreft de elementaire kennis die leerlingen eigenlijk *perfect* zouden moeten beheersen. Het is ***het absolute minimum.***

Voorbeeld:
Een leerplandoelstelling zoals G8: "*Bewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) uitvoeren met getallen (natuurlijke, gehele en rationale getallen)"* is ruim in te vullen. Afhankelijk van die interpretatie kunnen leerlingen al of niet 'scoren'.
Een normale basisoefening hierbij kan zijn: $(-2)\cdot 5 - 15\cdot(-4)$.
Wil een leerling dit soort oefeningen aankunnen, moeten ze vlot rekenen met de *elementaire* vormen $(-2)\cdot 5$ of $(15)\cdot(-4)$, dus het rekenen met *twee* gehele getallen. Wie dat laatste vlot kan, heeft misschien nog wat problemen met de complexiteit van basisvormen, maar kan mits oefening die kloof waarschijnlijk wel overbruggen. Wie de elementaire vormen niet aankan, gaat problemen tegemoet.

Voorbeeld:
Het elementaire beheersingsniveau geeft een indicatie voor de aansluiting met het basisonderwijs.
Bij leerplandoelstelling G30 *"De betekenis van de commutativiteit en de associativiteit van de optelling en de vermenigvuldiging correct verwoorden"* wordt op het elementair niveau de link gelegd met de gekende benamingen uit het basisonderwijs: *"De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking (de optelling/de vermenigvuldiging) met rationale getallen verwoorden als 'van plaats wisselen', respectievelijk 'schakelen'."*

Het niet bereiken van de doelstellingen op elementair niveau geeft belangrijke informatie over de leerling. Zonder deze kennis en vaardigheden kan een leerling in het vervolg van het curriculum wiskunde A-stroom onmogelijk verder. Als leerlingen dit niveau, ondanks goede inzet en zo nodig gerichte remediëring, voor alle onderdelen maar net of onvoldoende aankunnen, dan zijn consequenties in de oriëntering onvermijdbaar. De capaciteiten van de leerling liggen dan niet op het vlak van studierichtingen met een wiskundige onderbouw. Dan is een positieve keuze voor andere capaciteiten van de leerling aangewezen.

Het verwachte beheersingsniveau noemen we **basis** (**B**) en betreft de normale realisatie van de basisdoelstellingen, dus zonder ingewikkelde oefeningen en toepassingen. Dit is in principe het te realiseren niveau voor alle leerlingen*.* Het extra aangegeven niveau 'basis' (**B**) is meestal een omschrijving van een redelijke begrenzing van de doelstelling.

Voorbeeld:
De leerplandoelstelling G8: "*Bewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) uitvoeren met getallen (natuurlijke, gehele en rationale getallen)"* wordt op basisniveau geformuleerd als*: "Rekenen met gehele getallen, maximum vijf termen en/of factoren"*

Dit betekent dat oefeningen op basisniveau maximaal een vijftal termen/factoren zal bevatten. Dit is aangewezen voor een 'normale' evaluatie. Het bereiken van dit niveau zal de meeste tijd in beslag nemen. Ook in de evaluatie zal dit onderdeel het grootste deel uitmaken.

Het derde beheersingsniveau wordt **verdieping** (**V**) genoemd. Sommige leerlingen kunnen meer aan dan gemiddeld. Ze willen zich in de achtergrond van een aantal wiskundige elementen verdiepen. Ze zijn meer op zoek naar samenhang. Ze kunnen de kennis en vaardigheden vlot gebruiken in toepassingen. Dit niveau wordt nagestreefd voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat dit niet voor iedereen haalbaar is. En misschien hoeft dit ook niet. Dat wil zeggen dat we het realiseren van deze doelstellingen kunnen beperken tot een deelgroep van de leerlingen. Voor leerlingen die dit niveau niet aankunnen of niet graag opnemen, geeft dit essentiële informatie voor de keuze in hun verdere studieloopbaan.

Voorbeeld:
De leerplandoelstelling G 23: vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de vorm $x + a = b$ en $a.x = b$
(V) Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.
Voor leerlingen vraagt dit een zekere vorm van abstractie.

Naast deze drie beheersingsniveaus worden in het leerplan ook doelstellingen geformuleerd als **uitbreiding** (**U**). Het gaat om een extra leerinhoud, bovenop de normale leerinhouden, maar die niet noodzakelijk is als onderbouw voor het vervolg. De eerste drie niveaus vertonen zeker een stijgende graad van beheersing. In die zin is uitbreiding niet een nog hoger niveau. Op zich kan uitbreiding uitgewerkt worden op verschillende beheersingsniveaus. Bijvoorbeeld een ander talstelsel of de geschiedenis ervan kan op een basisniveau aangebracht worden bij een deelgroep van de leerlingen, zonder dat voor de andere leerlingen het vervolg van het curriculum geschaad wordt. Het kan uiteraard gaan over inhouden, die meer wiskundige diepgang of hogere vaardigheden vragen. Het kan zijn dat een andere werkvorm gehanteerd wordt, waarbij meer zelfstandigheid gevraagd wordt. Deze onderdelen kunnen slechts aangeboden worden aan beperkte deelgroepen van leerlingen. Het realiseren en het evalueren van uitbreidingsdoelstellingen kan in geen geval aan bod komen als de andere beheersingsniveaus niet gegarandeerd kunnen worden.

3.3 Krachtlijnen

Zoals in het vorige leerplan voor de eerste graad worden de concrete leerinhouden opgedeeld in twee grote componenten: de getallenleer met een numeriek en een algebraïsch onderdeel en de meetkunde. De doelen over dataverwerking zijn geïntegreerd in het deel getallenleer. Verbanden tussen de getallenverzamelingen worden aangezet. Ook het verband tussen de getallenleer en de meetkunde komt aan bod. De ordening van de doelstellingen is gebaseerd op het competentiedenken.
De eindtermen wiskunde bepalen uiteraard nog altijd voor een groot deel (90 %) de leerinhouden. De veranderingen in het leerplan slaan vooral op de verschuiving in de klemtonen die gelegd worden in de verschillende onderdelen en verder op de vakdidactische aanpak van de leerinhouden.
Het nieuwe leerplan vraagt meer aandacht voor een aantal aspecten. De tweede graad kan hieruit inspiratie putten om de aansluiting met de eerste graad te verstevigen.

Meer aandacht voor de aansluiting met het basisonderwijs

Dit komt zowel tot uiting in de opbouw van de leerinhouden als bij de didactische aanpak. Bijvoorbeeld bij de opbouw van de getallen is het de bedoeling te vertrekken vanuit de positieve getallen (natuurlijke getallen, decimale getallen, breuken) die leerlingen kennen vanuit het basisonderwijs. Verder zijn de leerlingen vanuit het basisonderwijs al vertrouwd met actieve werkvormen en zelfstandig werken. Ook hier is het de bedoeling dit verder te zetten door te kiezen voor aangepaste en activerende werkvormen.
In bijlage 2 is de referentie voor een document opgenomen dat de leerlijn aangeeft van het basisonderwijs naar de 1ste graad A secundair onderwijs.

Meer aandacht voor het verwerven van rekenvaardigheden

Door te focussen op het getalinzicht en het flexibel inzetten van rekenprocedures vraagt het leerplan meer aandacht voor rekenvaardigheden.
Een aantal aspecten hiervan:

- Het rekenen wordt getrapt aangebracht. Nemen we als voorbeeld het rekenen met negatieve getallen in het eerste leerjaar A.

  - In een eerste fase komen de terminologie, de optelling en de aftrekking van de negatieve gehele getallen aan bod. Hierbij worden ook de eigenschappen van deze bewerkingen onderzocht. Als toepassing worden vergelijkingen van de vorm $x + a = b$ opgelost.
  - In een latere fase komt de vermenigvuldiging van negatieve gehele getallen aan bod. Ook hier worden de eigenschappen ervan onderzocht.
  - Nog later worden de negatieve breuken en de bewerkingen behandeld. Als afsluiter komen dan de vergelijkingen van de vorm $a \,.\, x = b$ aan bod.

- Met 'vaardigheid' wordt in de eerste plaats vlotheid in rekenvaardigheid bedoeld. Het ingewikkeld en kunstmatig rekenen wordt dus best vermeden. Zo wordt bijv. het optellen en vermenigvuldigen van veeltermen op het beheersingsniveau ‘basis’ beperkt tot veeltermen in één veranderlijke.
- Alle vormen van rekenvaardigheid komen aan bod: hoofdrekenen, schatten, cijferen én gebruik van de rekenmachine.
- De rekenvaardigheid wordt geregeld onderhouden tijdens korte oefenmomenten. Hierbij wordt spiraalsgewijs gewerkt, d.w.z. dat vroeger geziene vaardigheden geregeld op een hoger niveau terugkomen.
- Voldoende voorbeelden moeten onderbouwen dat de letters voor willekeurige getallen staan.
- Er zit voldoende afwisseling in de oefenvormen.
  Zo kan er gewerkt worden met:

  - omkeervragen, bijv. vul passende veelvouden van x en y in zódat
    $(\ldots x + \ldots y) + (\ldots x + \ldots y) = 5x + 12y$,
  - aanvulvragen, bijv. plaats op elk van de volgende regels haakjes in het linkerlid zodat er een gelijkheid ontstaat
    $a + 2 \,.\, a + 7 = 3a + 7$
    $a + 2 \,.\, a + 7 = a^2 + 2a + 7$
    $a + 2 \,.\, a + 7 = 3a + 14$
    $a + 2 \,.\, a + 7 = a^2 + 9a + 14$,
  - patronen in rijtjes, bijv. vul de volgende rijtjes aan met één gelijkheid en verklaar de uitkomsten d.m.v. algebra

1 x 2 - 0 x 3 = 2	1 + 9 + 1 . 9 = 19
2 x 3 - 1 x 4 = 2	2 + 9 + 2 . 9 = 29
3 x 4 - 2 x 5 = 2	3 + 9 + 3 . 9 = 39
...	...

Meer aandacht voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden

Het is belangrijk dat de leerlingen van in de eerste graad voldoende tijd krijgen om problemen in de klas op te lossen. De moeilijkheidsgraad van deze problemen moet uiteraard aangepast zijn aan het niveau van de leerlingen. Succeservaring is immers een sleutel tot motivatie.
Leerlingen moeten leren om problemen in zijn geheel aanpakken. Daarom moeten open vragen gesteld worden i.p.v. enkel 'invul'problemen aan te bieden.
Bij het oplossen van problemen wordt over het algemeen een onderscheid gemaakt tussen *vijf* belangrijke fasen. Het gaat niet om gescheiden fasen. Geregeld wordt gewisseld tussen verschillende fasen en wordt teruggekeerd naar een vorige fase van het proces, bijvoorbeeld om een aspect te verduidelijken, te verhelderen of om terug te koppelen.

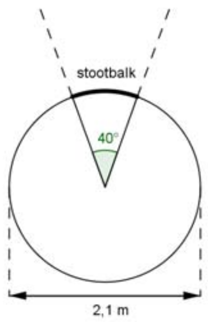
- *De fase van het exploreren van de opdracht:*
  - het zich eigen maken van de opdracht
  - het uitzoeken van de context
  - het in eigen woorden formuleren van het probleem
- *De fase van de mathematisering:*
  - het zoeken van een patroon in een situatie
  - het wiskundig vertolken van een situatie; het vastleggen van gegevens, vraag en van de relaties tussen gegevens en vraag
- *De fase van de wiskundige verwerking:*
  - het stapsgewijze wiskundig oplossen
- *De fase van het formuleren van een oplossing van het probleem:*
  - het gecontroleerd terugkijken op de werkwijze:
    - bij het analyseren:
      - heb ik geen informatie over het hoofd gezien;
      - heb ik de juiste informatie opgezocht;
      - beschik ik over voldoende gegevens;
    - bij het mathematiseren:
      - heb ik de relatie duidelijk vertaald; heb ik bijkomende voorwaarden opgelegd om het probleem haalbaar te maken …;
    - bij het berekenen:
      - heb ik de wiskundige procedures juist uitgevoerd;
      - heb ik een foutencontrole en proef uitgevoerd …;
    - bij de demathematisering:
      - heb ik de voorwaarden terug ingebracht …;
      - heb ik de wiskundige oplossing geïnterpreteerd in de context; (demathematiseren), met inbegrip van het onderzoek van de waarschijnlijkheid of de realiteitswaarde van het resultaat;
      - heb ik gecontroleerd dat de gevonden oplossing effectief een oplossing is voor het gestelde probleem;
      - met eventueel het bijstellen van de probleemstelling, het wijzigen van de wiskundige vertolking, het aanscherpen van de randvoorwaarden … of het probleem heroplossen;
  - het duidelijk formuleren van een antwoord.

- De *fase van het reflecterend terugkijken:*
    - de evaluatie van de gehanteerde werkwijze;
    - het formuleren van werkpunten ten aanzien van de verbetering van de voorgaande fasen, bijv. het verbeteren van de gehanteerde kennisschema's, het remediëren van rekenproblemen;
    - het beantwoorden van reflectieve vragen :
        - Welke problemen deden zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
        - Welke oplossingen, alternatieven zijn er? Welke voordelen en nadelen zie ik?
        - Hoe stuur ik mijn kennis, mijn vaardigheden en attitudes, mijn leervaardigheden bij?

Bij het oplossen van problemen kunnen leerlingen zowel individueel als in groep (per 2, per 3 …) werken.
Problemen worden best regelmatig aangeboden tijdens het schooljaar en blijven niet beperkt tot problemen die leiden tot het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad. Leerlingen zullen zich meer aangesproken voelen wanneer problemen in zinvolle contexten worden aangeboden. Het gebruik van ict kan een meerwaarde betekenen bij het oplossen van problemen.

Voorbeeld in het 1ste jaar: remafstand
De remweg van een auto met winterbanden bij remmen in de sneeuw met een snelheid van 50 km/u is 35 meter. Een auto met zomerbanden heeft in die situatie maar liefst 43 meter nodig om tot stilstand te komen. Hoeveel procent (afgerond op de eenheid) is de remweg door het gebruik van winterbanden korter geworden?

Voorbeeld in het 2de jaar: kogelstootbaan



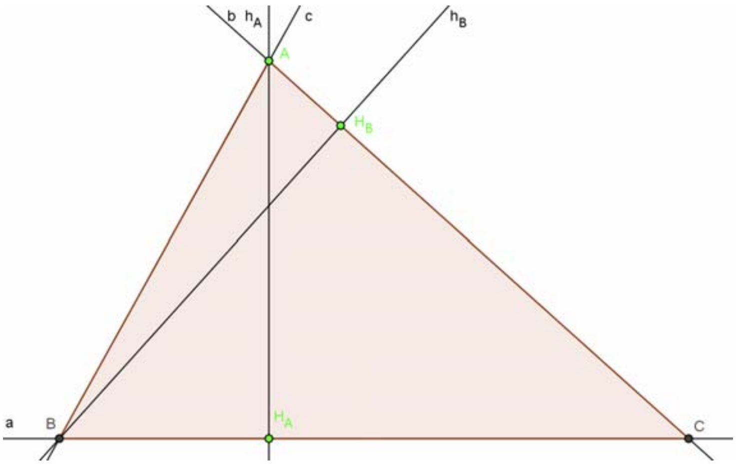
De stootbalk in nevenstaande tekening is een betonnen rand langs een deel van de kogelstootring.
Bereken hoeveel cm de lengte van de stootbalk moet zijn.

Belangrijk is dat bij het oplossen van problemen verschillende oplossingsmethoden aan bod komen. Hierbij kan een eerste aanzet gegeven worden tot het aanleren van oplossingsstrategieën (heuristiek).

Voorbeelden van heuristiek zijn: het maken van een tekening om een situatie te verduidelijken, een tabel maken, een formule opstellen, een vergelijking opstellen, één voorwaarde laten vallen, alle mogelijkheden opschrijven en dan elimineren, het probleem vervangen door een eenvoudiger probleem, concrete gevallen onderzoeken, het probleem oplossen door ontkenning, werken van achter naar voor, het zoeken van een patroon in een situatie.

Voorbeelden van vraagstukken met een (mogelijke) strategie:

- Wat is het grootste getal van 2 cijfers dat deelbaar is door 3 en waarvan de cijfers 2 verschillen?
  Heuristiek: één voorwaarde laten vallen, alle mogelijkheden opschrijven en dan elimineren.
- Hoeveel uur duurt het vooraleer een auto die rijdt aan 90 km/u een auto inhaalt die rijdt aan 60 km/u, als de trage auto één uur vroeger vertrekt dan de snelle?
  Heuristiek: een tabel maken, een vergelijking opstellen.
- Een student moet een gemiddelde halen van 90% op 5 testen om een AAA te halen.
  Op de eerste drie testen haalt hij een gemiddelde van 85%. Kan hij nog een AAA halen? Hoeveel moet hij dan gemiddeld halen op de laatste twee testen?
  Heuristiek: werken van achter naar voor.
- Construeer een driehoek ABC waarvan gegeven zijn : een hoekpunt A en twee voetpunten van hoogtelijnen, nl. H_A en H_B .
  Heuristiek: stel het probleem als opgelost voor:



Meer aandacht voor wiskundige taalvaardigheden, de verschillende taalniveaus en taalondersteuning

Voorbeeld taalniveaus:
1 Herkennen en benoemen
De leerling is in staat het begrip in concrete situaties te herkennen. De leerling kan voorbeelden ervan aanwijzen.
Bijv. De leerling kan een vierkant aanwijzen in een reeks figuren. Hij kan van een figuur in een rijtje zeggen of het een vierkant is of niet.

2 Verwoorden en gebruiken
De leerling kan het begrip hanteren op basis van voorwaarden waaraan het moet voldoen.
Hij kan eigenschappen van het begrip aangeven, maar de vorm is nog ongestructureerd en niet geformaliseerd. Hij kan een zekere analyse maken op grond van zijn intuïtieve kennis en daardoor begrippen beter classificeren.
Bijv. De leerling kan aangeven dat een figuur een gelijkbenige driehoek is, omdat er ‘twee gelijke benen zijn’.

3 Formaliseren
De leerling kan een definitie of een eigenschap behoorlijk formuleren.
Bijv. De leerling kan de definitie van een parallellogram geven. De leerling kan de eigenschappen van figuren formuleren en analyserend onderzoeken.

Visueel aspect van de wiskundetaal
Wiskundige informatie wordt vaak overgebracht via diagrammen en grafieken en ook via meetkundige figuren. Ook bij het oplossen van problemen, (en zeker in meetkunde) zal men vaak eerst een visuele voorstelling maken van de situatie. Iemand die de visuele taal begrijpt, krijgt via een figuur heel wat informatie over bijv. de zijden van de vierhoek, de hoeken, de diagonalen … De moeilijkheid van de visuele wiskundetaal voor leerlingen mag niet onderschat worden, omdat figuren vaak erg gecondenseerde, cryptische informatie bevatten. Leerlingen die de abstractie niet hebben kunnen maken, staan dikwijls voor een raadsel. Daarom is het belangrijk de leerlingen met veel figuren te confronteren en ze de vertaling van opgave naar figuur of van figuur naar geschreven informatie te laten maken. Vooral bij het opstellen van bewijzen kan dit belangrijk zijn: bijv. de gegevens op de figuur aanbrengen en zoveel mogelijk informatie op de figuur aanbrengen.

Zinvol en functioneel gebruik van ICT (demonstratie, verwerking …)

Ict kan gebruikt worden:
- bij illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen door de leraar,
- bij het uitvoeren van berekeningen door leerlingen,
- bij het onderzoeken van eigenschappen door leerlingen,
- bij het maken van constructies door de leerlingen,
- bij het verwerken van informatie.

Er kan gebruik gemaakt worden van de rekenmachine, van rekensites, van een dynamisch meetkundeprogramma zoals Geogebra, van applets ...

Aandachtspunten bij het gebruik van ICT zijn:
- leerlingen ICT laten gebruiken bij (een deel van de) evaluatie,
- bewaken van het hoofdrekenen, d.w.z. de rekenmachine soms verbieden,
- aandacht hebben voor afrondingen,
- ICT vooral gebruiken als het een meerwaarde heeft voor wiskunde,
- overleggen in de vakgroep en een leerlijn ICT vastleggen.

Meer aandacht voor procesevaluatie

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen vragen te leren stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij de verwerving van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In het kader van het levenslang leren kan vertrouwd worden met procesevaluatie (waarbij niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden), de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt geboden door opdrachten, waarbij de leerlingen zelf gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.
Het betrekken van de leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan, het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten vanuit een gesprek kan ook bij deze 'jonge' leerlingen de gevoeligheid voor zelfevaluatie al aanscherpen.
Een stapje verder op weg naar zelfevaluatie is het aanreiken (en met de leerlingen doornemen) van reflectieve vragen over hun wiskundig bezig zijn (kennis, vaardigheden en attitudes).
Uiteindelijk moet de leerling ertoe gebracht worden dat hij bij zichzelf die vragen gaat stellen. Dat is in de eerste graad niet weggelegd voor alle leerlingen.
Een mogelijkheid daartoe wordt geboden door het aanleggen van een portfolio door de leerling. Werken met een portfolio is meer dan het verzamelen van gemaakte oefeningen. Dat is uiteraard al een eerste stap, maar het is meteen duidelijk dat het niet gaat om zomaar willekeurige oefeningen. De oefeningen moeten gericht gekozen worden in functie van wat de leerling aankan. Voor wiskundig sterke leerlingen zal een aantal kale oefeningen wellicht niet volstaan. In principe moet de leerling zelf kunnen beslissen over de samenstelling ervan. Dat vraagt uiteraard al een zekere

maturiteit, die in de eerste graad vaak nog moet ontwikkeld worden. In de eerste graad biedt de leraar daarbij nog hulp, bijvoorbeeld door het aanreiken van diagnostische toetsen, waaruit de leerling voor zichzelf werkpunten kan bepalen of door het aanreiken van een ruime keuze aan adequaat oefenmateriaal.
Werken met een portfolio biedt een werkwijze, waarbij gericht en gedifferentieerd kan ingegaan worden op de individuele noden van de leerling.

Meer aandacht voor de didactische aanpak

Voorbeeld van stappen in de didactische aanpak van een onderdeel/onderwerp in de eerste graad:

1 Diagnostische toets over kennis uit het basisonderwijs of vroeger geziene onderdelen
2 Klassikaal of via taken definities, regels en eigenschappen aanbrengen en formuleren
3 Klassikaal oefenen: elementair - basis - verdieping (E - B - V)
4 Diagnostische toets over het onderdeel: E - B - V
5 Gedifferentieerd oefenen: E - B - V
  - individueel of in groepjes
  - met moetjes en magjes
6 Toets over het onderdeel: E - B - V

Het is zinvol dat leerlingen ook oefenen op grote gehelen met gemengde leerinhouden/oefeningen. Dit kan in zogenaamde 'bufferruimten', die men inlast in de jaarplanning.
Bij het oefenen op grote gehelen komen best zoveel mogelijk vaardigheden aan bod: rekenvaardigheid, denk- en redeneervaardigheden, probleemoplossende vaardigheden.
Verschillende werkvormen kunnen gebruikt worden, bijv.

- groepswerk, eventueel met moetjes en magjes
- groepswerk met experts
- hoekenwerk, bijv. een rekenhoek, een vraagstukkenhoek, een computerhoek, een spelhoek ...

Meer aandacht voor integratie van vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde

Meetkunde heeft te maken met inzicht (met zien) in de basiselementen van figuren en in hun samenhang en relaties. Dit inzicht wordt in aanvangsfase van de meetkunde grotendeels gerealiseerd door te “kijken” (observeren, beschouwen) en “tekenen” (vastleggen, vergelijken, besluiten). De meetkundekennis die leerlingen op deze manier hebben opgedaan in het basisonderwijs kan in de 1ste graad functioneren om meetkundige situaties te modelleren. De doelstellingen van de 1ste graad gaan verder dan leren observeren en kijken en het voorstellen daarvan. Ook de mentale (denk)handeling bij het observeren is belangrijk. Je tekent wat je denkt te zien van op de plaats van de waarnemer. Dit vergt een sterk ontwikkelend ruimtelijk voorstellingsvermogen en is niet voor alle leerlingen evident. Vandaar dat dit veel oefenen vraagt met allerlei voorstellingen van ruimtelijke situaties en van observeren van vlakke situaties. De ‘waarom’-vraag is hierbij belangrijk. Het gebruik van begrippen en eigenschappen wordt voor een aantal leerlingen nog beperkt intuïtief gebruik, terwijl leerlingen die doorstromen in sterk wiskunde onderbouwde studierichtingen de houding moeten verwerven van telkens opnieuw de waaromvraag te willen stellen, en van dus zelf veel belang te hechten aan argumenteren en verklaren.

Uit de enquête (zie 1) blijkt dat ruimtemeetkunde amper werd behandeld, omdat ruimtemeetkunde vaak het laatste hoofdstuk in het leerboek was en de tijd te kort schoot of omdat volgens sommige leerkrachten ruimtemeetkunde toch al behandeld was in de basisschool en de 1ste graad er weinig aan toe te voegen had. Nu wordt vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde dus geïntegreerd. Zo wordt bijv. het herkennen van onderlinge relaties tussen rechten gekoppeld aan situaties met concrete ruimtefiguren (zoals kubus en balk) waarbij geleidelijk de overgang wordt gemaakt van de ribben naar de dragers van de ribben.

Meer aandacht voor het ontwikkelen van leervaardigheden

Hulp bieden bij het leren kan door:
- voorkennis te onderzoeken en bij te werken,
- na elke les de leerstof in het handboek te situeren en daarbij leertips te geven,
- te wijzen op de vormkenmerken van de tekst: titels, subtitels, kaders ...
- samenvattingen van de leerstof in het handboek te gebruiken,
- gebruik te laten maken van een vademecum (regels verduidelijken met voorbeelden),
- te laten oefenen op kleine én grote gehelen,
- gebruik te laten maken van ‘gereedschapskisten’,
- gebruik te laten maken van een lijst van heuristieken,
- correctiesleutels te geven bij bepaalde oefeningen,
- geregeld parate kennis te evalueren en aan foutenanalyse te doen.

In dit verband verwijzen we naar bijlage 3 waarin een referentie voor de discussietekst: ‘Aanzet tot een document van parate kennis en vaardigheden wiskunde 1ste graad’ is opgenomen.

Het werken met beheersingsniveaus (elementair, basis, verdieping)

Zoals hoger vermeld moet het werken met beheersingsniveaus de leraren toelaten gemakkelijker te differentiëren en daardoor zowel tegemoet te komen aan de problematiek van wiskundig zwakkere leerlingen, als een voldoende motiverende aanpak mogelijk te maken voor wiskundig sterkere leerlingen die niet op hun honger mogen blijven zitten.

Samenvattend zijn de krachtlijnen in het leerplan van de 1ste graad A:

- Meer aandacht voor de aansluiting met het basisonderwijs
- Meer aandacht voor het verwerven van rekenvaardigheden
- Meer aandacht voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden
- Meer aandacht voor wiskundige taalvaardigheden, de verschillende taalniveaus en taalondersteuning
- Zinvol en functioneel gebruik van ICT
- Meer aandacht voor procesevaluatie
- Meer aandacht voor didactische aanpak
- Meer aandacht voor integratie van vlakke meetkunde en ruimtemeetkunde
- Meer aandacht voor het ontwikkelen van leervaardigheden
- Het werken met beheersingsniveaus (elementair, basis, verdieping)

4 Evaluatie en beheersingsniveaus

Door het werken met beheersingsniveaus stromen er vanaf 1 september 2011 leerlingen in de tweede graad in die meer of minder verdieping hebben gezien. Dat kan zelfs - door binnenklasdifferentiatie - vanuit één zelfde groep uit de eerste graad.
Een gedifferentieerde aanpak in de 1ste graad is van belang om op basis daarvan leerlingen een beter advies te kunnen geven in de oriëntering naar de 2de graad.

We vermelden hierbij de leerplanrichtlijnen in verband met evaluatie.
Het elementaire niveau (E) draagt voor maximaal 20 % bij tot de evaluatiegegevens.
Het beheersingsniveau basis (B) betreft de normale realisatie van de basisdoelstellingen, dus zonder ingewikkelde oefeningen en complexe toepassingen. Dit is het na te streven niveau voor alle leerlingen. Het bereiken van dit niveau zal de meeste tijd in beslag nemen. Ook in de evaluatie zal dit onderdeel het grootste deel uitmaken. Basisniveau en elementair niveau samen dragen voor minimaal 70 % bij tot de evaluatiegegevens.
Het beheersingsniveau verdieping (V) betreft de verdieping van de achtergrond van wiskundig kennis. Er is meer aandacht voor samenhang, en voor vlotter functioneren van kennis en vaardigheden. De aanpak van deze onderdelen moet de leerlingen die wiskundig meer aankunnen voldoende uitdagen opdat zij een studieloopbaan met meer wiskunde in hun pakket aandurven. Leerlingen die hier goed scoren kunnen georiënteerd worden naar een studierichting met een sterke wiskundeonderbouw in aso, kso of tso. De leerkracht kan dit niveau nastreven voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat dit niet voor iedereen haalbaar is, en ook niet hoeft. Dat wil zeggen dat de leerkracht uit de eerste graad het realiseren van deze doelstellingen kan beperken tot een deelgroep van de leerlingen. De leerlingen die dit niveau niet aankunnen of niet graag opnemen, zullen best georiënteerd worden naar een verdere studieloopbaan met een beperkt pakket wiskunde. Het verdiepingsniveau draagt voor maximaal 30 % bij tot de evaluatiegegevens.

5 Consequenties voor de tweede graad

We vatten de consequenties van het nieuwe leerplan in de eerste graad A samen in een aantal aandachtspunten die ook suggesties inhouden om de lijnen die uitgezet werden in de eerste graad A door te trekken in de tweede graad. Het gaat doorgaans om het beklemtonen van krachtlijnen die nu al in elk leerplan van de tweede graad in de rubriek 'Vaardigheden en attitudes' vermeld zijn.
De concretisering en uitwerking hiervan in de klaspraktijk is - evident - afhankelijk van de onderwijsvorm en de studierichting.

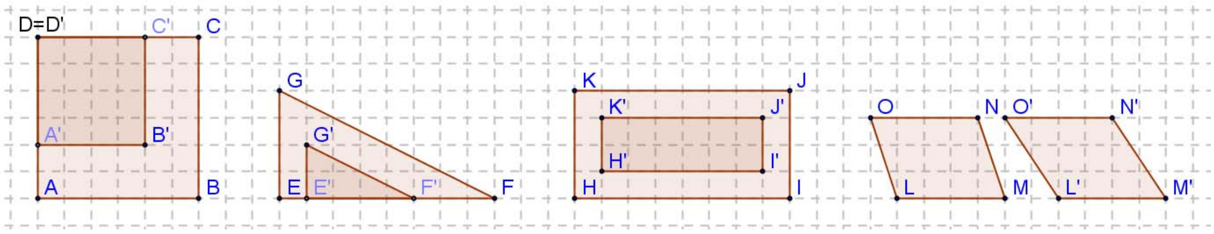
Aandacht voor de aansluiting met de eerste graad

In de tweede graad is het zeer belangrijk dat de leerkracht een beeld krijgt van de beginsituatie van de leerlingen en dus voldoende op de hoogte is van de leerplanrealisatie in de eerste graad A. Het is dan ook aangewezen dat de aansluiting eerste graad A - tweede graad geregeld als agendapunt aan bod komt op een vakvergadering en dat de aansluiting wordt gekaderd binnen de leerlijnen.

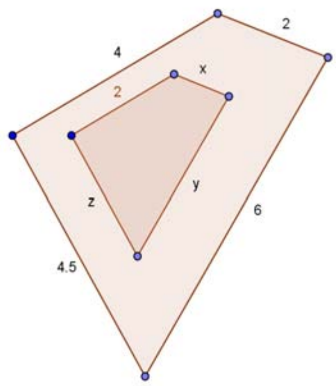
In bijlage 4 wordt een overzicht gegeven van de leerplandoelstellingen (vaardigheden, attitudes en inhoudelijke doelstellingen) met, indien opgenomen in het leerplan, de vermelding van het beheersingsniveau basis en van het beheersingsniveau verdieping bij de inhoudelijke basisdoelstellingen. We pleiten ervoor dit overzicht te bespreken tijdens een vakvergadering waarbij leerkrachten van de eerste graad informeren en concrete toelichting geven over de realisatie van deze leerplandoelstellingen en de beheersingsniveaus ervan. Sluitend kan dit niet zijn. Het aanbieden van het beheersingsniveau ‘verdieping’ is geen garantie dat alle leerlingen dit niveau ook zullen gehaald hebben. Er worden in de tweede graad nieuwe klasgroepen gevormd en er komen leerlingen uit andere scholen. Dus het blijft belangrijk om in de tweede graad voor de aanvang van een groter leerstofgeheel een diagnostische toets af te nemen.

Voorbeeld van een diagnostische proef bij de aanvang van het leerstofonderdeel gelijkvormigheid van vlakke figuren

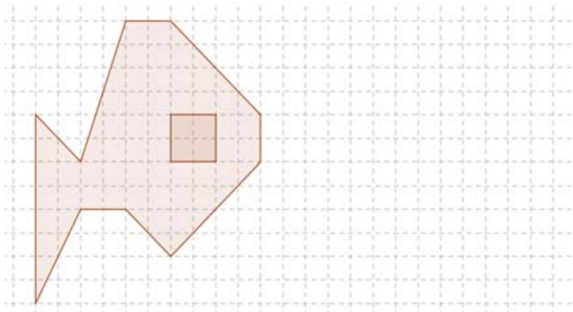
1 Welke van de onderstaande figuren zijn gelijkvormig? Geef bij de gelijkvormige figuren de gelijkvormigheidsfactor.



2 Bereken de lengte van de onbekende zijden in de onderstaande gelijkvormige vierhoeken.



3 Teken onderstaande figuur op schaal 1 : 2.



4 Op een landkaart van België is de afstand Genk-Tongeren 2 cm en is de oppervlakte van België 250 cm². Op een andere landkaart is de afstand Genk-Tongeren 6 cm.
Hoe groot is de oppervlakte van België op die landkaart?

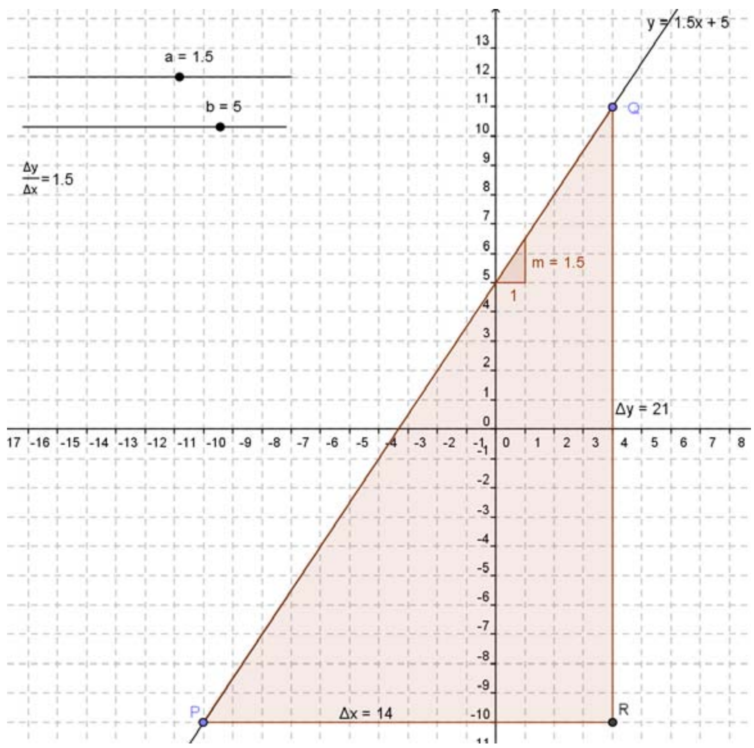
Verder moet er rekening mee gehouden worden dat het nieuwe leerplan pas is geïmplementeerd en dat het werken en vertrouwd worden met nieuw leermateriaal tijd vergt. Leerkrachten in de eerste graad zullen op basis van hun ervaringen met het nieuwe leerplan en het nieuwe leermateriaal allicht nog bijsturingen doorvoeren. Ook hiertoe is overleg tussen beide graden zinvol. Het document 'Discussietekst: Aanzet tot een document van parate kennis en vaardigheden' (bijlage 3) kan hierbij ook ingeschakeld worden.

Zinvol en functioneel gebruik van ICT

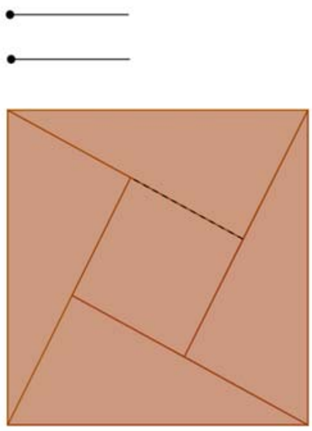
Bij onderwerpen zoals reële functies en statistiek is het gebruik van ICT (voornamelijk een grafische rekenmachine) al vrij goed ingeburgerd. Vaak wordt ICT ingeschakeld als controlemiddel. Toch blijven er nog mogelijkheden onbenut om ICT (software, applets, websites) zinvol en functioneel in te schakelen als demonstratie, bij de analyse van een probleem, bij remediëring …
Suggesties worden geregeld doorgegeven via de diocesane mededelingen. Verder wordt ook hier het onderling uitwisselen van expertise en ervaringen in de vakgroep aanbevolen.

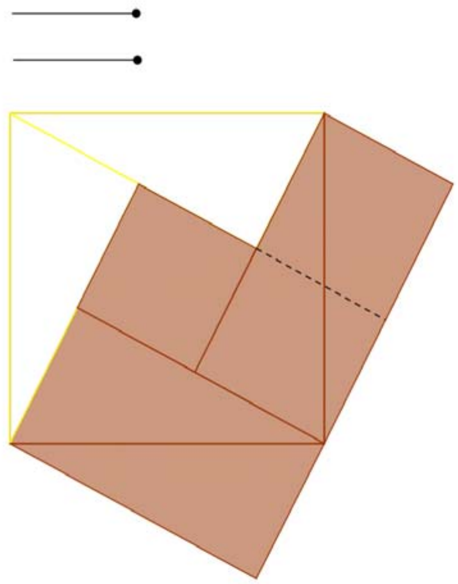
Voorbeelden van zinvol ICT-gebruik in de 2de graad

1 Illustratie van de helling van een rechte



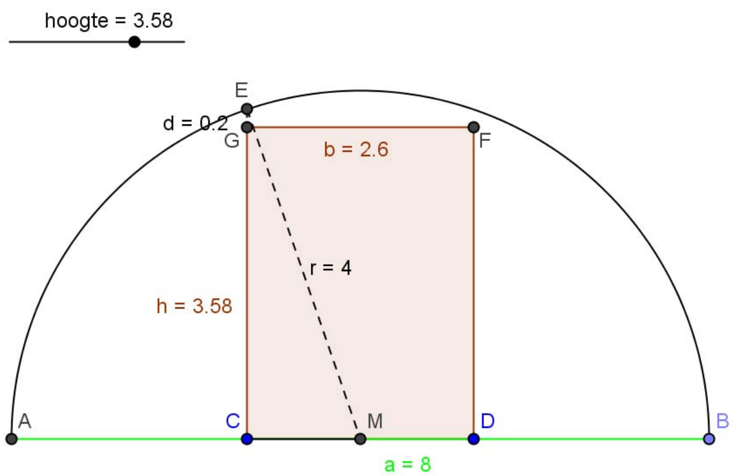
2 Bewijs van Bhaskara van de stelling van Pythagoras





3 Hoogte van een bus in een tunnel

Een tunnel heeft als doorsnede een halve cirkel met een diameter van 8 meter.
Een autocar van 2,6 m breed wil deze tunnel - met éénrichtingsverkeer - inrijden.
Wat is de maximale hoogte van deze bus als er tussen het dak van de bus en de tunnelwand een ruimte van 20 cm moet overblijven?



Meer aandacht voor het verwerven van rekenvaardigheden

Er is een toenemend aantal klachten over de gebrekkige rekenvaardigheid van leerlingen. Toch wordt hieraan in de praktijk veel aandacht besteed. Waarschijnlijk gaat het niet altijd over kennen of niet kunnen, maar is het ook een attitudeprobleem. Leerlingen moeten leren bewust aandacht te besteden aan hun berekeningen en een controlerende houding verwerven (zie ook de vakgebonden attitudes). Ook de getalgevoeligheid speelt een rol in het vlot werken bijv. bij het vereenvoudigen, bij het splitsen van getallen in een som of een product, bij het herkennen van een volkomen kwadraat ... Het gaat om basisrekenvaardigheden die vanaf de basisschool worden verworven, waarop nu meer nadruk wordt gelegd in de eerste graad en die aan bod moet blijven komen in de tweede graad.
Bij het oefenen gaat ook in de tweede graad vlotheid boven ingewikkeldheid. Met geregeld wat eenvoudig algebraïsch rekenwerk, voor de hand liggende vereenvoudigingen ... kan de formulegevoeligheid onderhouden en aangescherpt worden. Vaak zetten leerlingen stappen die de oplossingsweg nodeloos ingewikkeld maken of passen ze niet de juiste regels toe, omdat ze een opgave niet 'herkennen' als bijv. het oplossen van een vergelijking, het kwadraat van een tweeterm. Vandaar de noodzaak om leerlingen geregeld te confronteren met gevarieerde oefeningen zodat ze niet terugvallen op routine en met daarbij een afwisseling in de oefenvormen.
Leerlingen mogen geen slaaf worden van de rekenmachine. Het is aangewezen dat in sommige lesfasen een rekenmachine niet mag gebruikt worden en dat er geregeld geëvalueerd wordt zonder dat de rekenmachine mag gebruikt worden.

Meer aandacht voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden

In de eerste graad worden er meer inspanningen gedaan om de leerlingen stappen te laten zetten in het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Dit proces moet gecontinueerd worden.
In elk leerplan van de tweede graad wordt in de rubriek 5.1 'Vaardigheden en attitudes' ingegaan op het belang van het verwerven van probleemoplossende vaardigheden.
Bij het oplossen van problemen maken we een onderscheid tussen vijf belangrijke fasen:

- de fase van het exploreren van de opgave,
- de fase van de mathematisering,
- de fase van de wiskundige verwerking,
- de fase van het formuleren van een oplossing van het probleem (o.a. demathematiseren),
- de fase van het reflecterend terugkijken.

Het gaat niet om gescheiden fasen. Geregeld wordt gewisseld tussen verschillende fasen en wordt teruggekeerd naar een vorige fase van het proces, bijvoorbeeld om een aspect te verduidelijken, te verhelderen of om terug te koppelen.
Voor meer toelichting bij deze vijf fasen: zie p. 14 van deze tekst.

Het bevorderen van het probleemoplossend denken kan onder meer door:

- het oplossen van problemen geregeld aan bod te laten komen,
- de fasen van het oplossingsproces duidelijk te expliciteren,
- meerdere oplossingen van eenzelfde probleem te bespreken,
- leerlingen ook te confronteren met opgaven die niet meteen aansluiten bij het onderwerp dat behandeld wordt,
- het zelfvertrouwen en doorzettingsvermogen van de leerlingen verder te ontwikkelen,
- leerlingen bewuster op een meer metacognitief niveau te laten terugkijken op hun denkproces.

De voorbeeldfunctie en begeleidende rol van de leerkracht bij het verwerven van probleemoplossende vaardigheden kan niet onderschat worden.
De leerkracht kan de probleemoplossende vaardigheden versterken bij leerlingen door:

- te verwijzen naar het gebruik van zoekstrategieën,
- aan te zetten tot kritisch nadenken, tot reflecteren, tot discussiëren,
- de leerlingen aan te moedigen,

zowel bij het klassikaal zoeken en opstellen van verklaringen, bewijzen en het opbouwen van redeneringen als tijdens het individueel werken of werken in groepjes.
Nogal wat leerlingen komen er niet toe om zelf een probleem aan te pakken. Het aanbieden van haalbare problemen kan leiden tot succeservaring en leerlingen aanzetten om nieuwe en meer complexe problemen aan te pakken. Differentiatie in de opdrachten is noodzakelijk. Zo kunnen wiskundig-sterke leerlingen meer open problemen aangeboden krijgen.

Meer aandacht voor de didactische aanpak

Geregeld oefenmomenten
Parate kennis en de (basis)rekenvaardigheden worden onderhouden door geregeld (korte) oefenmomenten te plannen, doorgaans ook gekoppeld aan een evaluatie.

Bufferruimten
Ook In de 2de graad is het zinvol om 'bufferruimten' in te lassen in de jaarplanning. In deze bufferruimten kan men oefenen op grotere gehelen (gemengde leerinhouden en gevarieerde oefenvormen) waarbij zoveel mogelijk vaardigheden aan bod komen. Zo kunnen essentiële leerinhouden en vaardigheden beter onderhouden en verworven worden.

Werkvormen
Bij de keuze van werkvormen blijft 'afwisseling ' het sleutelwoord. Werkvormen die het samenwerkend en interactief leren stimuleren en werkvormen die leiden tot meer zelfverantwoordelijkheid en zelfstandig leren moeten voldoende geïntegreerd worden. Dit is noodzakelijk om de ontwikkeling van bepaalde vaardigheden en vakgebonden attitudes te realiseren.

Meer aandacht voor wiskundige taalvaardigheden, de verschillende taalniveaus en taalondersteuning

Ook in de tweede graad blijft het een uitdaging om de leerlingen wiskundige begrippen, eigenschappen, oplossingen en redeneringen correct te leren verwoorden en correct te leren neerschrijven. Een redenering moet vlot en logisch te volgen zijn, bijv. door het gebruik van zinsneden zoals "Omdat … weten we dat …", "We berekenen eerst …", "Veronderstel dat … Dan mogen we besluiten dat …", "Uit … volgt dat …". Als er wiskundesymbolen worden gebruikt, moeten leerlingen die correct en met inzicht hanteren. Vaak wordt bijv. het implicatieteken door leerlingen te pas en te onpas gebruikt. Leerlingen moeten bijv. ook beseffen dat een equivalentieteken niet hetzelfde is als een implicatieteken. Soms is een woordelijke formulering meer aangewezen dan een betekenisloze opsomming van symbolen.
Dit vraagt overleg in de vakgroep over de keuze hoe de symbolentaal geleidelijk wordt opgebouwd en welke symbolen er bij welke leerlingengroepen worden geïntroduceerd.

Meer aandacht voor procesevaluatie

Meer aandacht voor procesevaluatie kan onder andere door leerlingen af en toe

- te laten werken aan opdrachten waarbij ze over correctiesleutels beschikken en zichzelf evalueren;
- zelf een foutenanalyse (aard van de fouten, eventuele systematische fouten …) te laten maken;
- enkele reflectieve vragen te laten beantwoorden over hun studiehouding, hun leervaardigheden, hun houding t.o.v. wiskunde;
- zelf werkpunten te laten formuleren.

Het is geenszins de bedoeling dat aan elke toets, elke oefeningenreeks een zelfevaluatie wordt gekoppeld. De opvolging van zelfevaluatie door de leerlingen moet ook beheersbaar blijven.

De suggestie in de eerste graad om te werken met een portfolio waarbij gericht en gedifferentieerd kan ingegaan worden op de individuele noden van de leerling blijft een optie voor de tweede graad. Een portfolio is een middel om het 'persoonlijk werk' van de leerling bij te houden. Een portfolio is meer dan het verzamelen van zomaar willekeurig gemaakte oefeningen. De oefeningen moeten gericht gekozen zijn in functie van de leerling. In principe moet de leerling zelf mee kunnen beslissen over de samenstelling ervan. Door te werken met een portfolio ontwikkelt de leerling ook andere vaardigheden. Zo krijgt de leerling een grote verantwoordelijkheid voor het eigen werk en de planning ervan.

Samenvattend zijn de consequenties voor de 2de graad:

- Aandacht voor de aansluiting met de eerste graad
- Zinvol en functioneel gebruik van ICT
- Meer aandacht voor het verwerven van rekenvaardigheden
- Meer aandacht voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden
- Meer aandacht voor de didactische aanpak
- Meer aandacht voor wiskundige taalvaardigheden, de verschillende taalniveaus en taalondersteuning
- Meer aandacht voor procesevaluatie

Bijlagen

Bijlage 1: Werken met letters in de eerste graad A-stroom

Toenemende abstractie van 6 tot 14 jaar

Werken met letters in de 1ste graad A-stroom

Het leerplan van de 1ste graad A-stroom omschrijft verschillende wijzen waarop letters in de wiskunde kunnen aangewend worden. Problemen met letters in een latere fase komen soms voort uit een te snelle invoering van verschillende types lettergebruik.

Laten we even de verschillende types lettergebruik bekijken.

Letters als onbekenden

Leerlingen van de basisschool zijn vertrouwd met oefeningen en spelletjes zoals: “Ik denk aan een getal. Tel ik er 12 bij, dan bekom ik 15. Welk is het oorspronkelijke getal?”
De meeste leerlingen berekenen spontaan de oplossing met 15 – 12. Ze beseffen niet dat ze een vergelijking hebben opgelost. In feite lossen ze op: … + 12 = 15, een zogenaamde puntoefening.
Een verder gemathematiseerde vorm van deze spontane werkwijze is de vergelijking x + 12 = 15.
Deze *verdere mathematisering* is nodig omdat spontane werkwijzen niet zullen werken bij meer complexe situaties. Werken met lege plaatsen zoals in puntoefeningen zal niet lukken bij hogere machten van de onbekende. Deze eenvoudige situatie biedt de gelegenheid om leerlingen te laten inzien hoe we in de wiskunde te werk gaan. Omdat de wiskundetaal kwalitatief beter wordt, kunnen we er later ook moeilijkere dingen mee beschrijven. In de eerste fase is het een ‘vorm’probleem. Toch legt een te snel overgaan op hogere vormen van vergelijkingen een drempel bij vele leerlingen. Een rustige instap is dus noodzakelijk.
De *onbekende x* verschijnt dus als een soort *plaatshouder* voor het voorlopig onbekende getal dat de oplossing is. In deze vergelijking staat x voor een *welbepaald getal*. Het oplossen van de vergelijking bestaat erin de vergelijking zo om te vormen dat de waarde van dat bepaalde getal snel af te lezen is, i.c. x is geëxpliciteerd in een lid, de getalwaarde in het andere.
Drie belangrijke bedenkingen hierbij.

- Bij de mathematisering hoort een goed inzicht van wat er met de letter bedoeld wordt. In de vergelijking x + 12 = 15 moet x zo gekozen worden dat de gelijkheid tussen rechter- en linkerlid gerealiseerd wordt. Daarvoor kunnen we doen alsof de vergelijking een gelijkheid is, en *de regels van gelijkheden* erop toepassen. (Een term overbrengen of een factor overbrengen; of een zelfde getal bij beide leden optellen of beide leden met een zelfde getal vermenigvuldigen). Het loont de moeite voor leerlingen die inzichtelijk willen werken van hen deze methodiek goed bij te brengen.

- In de vergelijking 3.x = 17 is de wiskundige oplossing: $x = \frac{17}{3}$.

  Koppelen we dit echter aan de volgende situatie: “Ik heb € 17 op zak. Hoeveel kaarten van € 3 kan ik kopen?”, dan is de oplossing gelijk aan “5 kaarten”. Je moet immers de bekomen wiskundige oplossing afronden. De oplossing kan in deze situatie geen rationaal getal zijn, want het is een aantal.

  Is de situatie “17 leerlingen van een klas worden verdeeld over drie groepjes, hoeveel leerlingen telt elk groepje?”, dan helpt ook afronden en opronden niet. Noch 5 noch 6 biedt de oplossing. De meest voor de hand liggende oplossing is: 6, 6 en 5.
  Met andere woorden een situatie kan leiden tot een beperkende voorwaarde op de soort getallen die als

oplossing kunnen aanvaard worden. Het is belangrijk deze ‘voorwaarden’ op een natuurlijke wijze te laten ontstaan. Inderdaad je zou ook kunnen stellen: “los op 3.x = 17 in $\mathbb{N}$. Wiskundig maak je wellicht dezelfde denkstappen om de “oplossing” te berekenen, maar met het besluit dat het bekomen resultaat niet tot de natuurlijke getallen behoort, en dus dat de vergelijking geen oplossing heeft. Het is evident dat dit verhaal een paar abstractiestappen hoger ligt dan de realistische situaties. Daarom gaat men er vakdidactisch van uit dat leerlingen best een tijd geconfronteerd worden met die *eenvoudige betekenisvolle situaties*.

- De uitdrukking 3.x = 17 kan ook beschouwd worden als een zogenaamde uitspraakvorm. De letter x speelt dan niet de rol van een welbepaald getal, maar is een *veranderlijke* binnen een bepaalde gegeven verzameling. Merk dus de subtiele verandering die er gebeurt, en waarvoor vele leerlingen geen oog hebben.
De vraag die bij een dergelijke uitdrukking gesteld wordt, is of de uitdrukking *waar of niet waar* is. De veranderlijke x moet daartoe wel gebonden worden. Een mogelijkheid is x een bepaalde waarde toe te kennen. Bijvoorbeeld voor x = 6 is 3.x = 17 onwaar.
Een andere mogelijkheid is dat de veranderlijke x in de uitspraakvorm *gekwantificeerd* wordt. Dat leidt tot uitdrukkingen van de vorm: $\forall x \in R : 3 \cdot x = 17$ of $\exists x \in R : 3 \cdot x = 17$ (met R de referentieverzameling). Zo is de tweede vergelijking een ware uitspraak als R = $\mathbb{Q}$, maar uiteraard onwaar als R = $\mathbb{N}$.
Deze aanpak staat nog veel verder af van de concrete (reken)situaties van hiervoor. Het vergt van leerlingen al een redelijk abstract denken om deze wiskunde te begrijpen. Het is een maatschappelijke keuze dat in de eerste graad vooral basisvorming wordt gegeven. Voor de wiskundevorming betekent dit dat ze die basisvorming moet ondersteunen met een meer algemene benadering. Wiskunde beschikt daarvoor over vele troeven. Een doorgedreven wiskundige abstracte vorming spoort daarmee echter niet helemaal samen. We kunnen wel een aantal abstractere denksporen aanbieden in verband met oriëntering. Leerlingen die later met het abstractere geconfronteerd zullen worden, kunnen dit op die leeftijd relatief gemakkelijk verwerven. De leerlingen die wat betreft abstract denkvermogen wat minder begaafd zijn, moeten hierdoor niet uitgesloten worden.

Letters in formules

Een tweede vorm van lettergebruik waar leerlingen in de basisschool al enigszins mee geconfronteerd werden is die van *letters in formules*. Zo kennen ze de formule voor de oppervlakte van een rechthoek, een driehoek en een cirkel. Ze drukken een algemeen verband uit tussen verschillende grootheden, bijvoorbeeld het verband tussen de oppervlakte van de rechthoek en de lengte en de breedte van de rechthoek. (Strikt genomen gaat het over het verband tussen de maatgetallen van deze grootheden bij vergelijkbare maateenheden). Vaak gebruiken leerlingen nog zogenaamde *woordformules*.

> *Voorbeelden*
> Oppervlakte rechthoek = basis x hoogte.
> Interest (op jaarbasis) = uitgezet kapitaal x jaarlijkse rentevoet x aantal jaar

Woordformules hebben het voordeel dat ze voor leerlingen gemakkelijk hanteerbaar zijn. Ze gebruiken vaak de vlotte *actieve taal*, vaak dus gewoon dagelijkse taal met hier en daar al een wiskundig teken dat verschijnt, een soort tussentaal. Dit soort woordformules is *een belangrijk tussenstadium* in het verwoorden van wiskundige relaties en is ook belangrijk in de wiskundetaalontwikkeling van leerlingen. Ze worden vaak als onnauwkeurig en slordig ervaren. Er is ook niet één vorm die als juist aangezien kan worden.
Binnen wiskunde moeten we groeien naar een *relatieve taal* (er worden duidelijke wiskundige verbanden aangegeven tussen de gegeven items) of een *functionele taal* (er worden duidelijke wiskundig relaties tussen wiskundige items gelegd). Uiteindelijk zullen grootheden in de formules gaan functioneren met letters al of niet nog verwijzend naar de woordformules (bijv. de eerste letter).
Dit is een *moeizaam leerproces*. In de verkenningsfase (uit de spiraal) zal meestal de actieve taal gebruikt

worden en bij wiskundige relaties zal gewerkt worden met woordformules. Naarmate begrippen, eigenschappen … beter omschreven worden en beter in onderling verband gaan functioneren (dus op een hoger beheersingsniveau) zal ook een hogere taal gehanteerd worden. Het is dus niet correct te veronderstellen dat eens voor een onderdeel het correcte taalgebruik geleerd werd, dit automatisch in elk ander onderdeel zal overgenomen worden. Dit is waarschijnlijk verbonden met het beheersingsniveau waarop de kennis functioneert. Bij elk nieuw proces, nieuw onderdeel zal deze weg moeten afgelegd worden, al of niet in een versneld tempo.
De *letters,* die in de formules voorkomen, staan voor een bepaalde grootheid, de hoeveelheid ervan, de grootte ... In het kader van vraagstukken wordt relatief snel gedacht aan een *bepaalde waarde,* die aan de grootheid in dat kader kan toegekend worden, of moet berekend worden.

> *Voorbeeld*
> Bekijken we als voorbeeld het vraagstuk: “Een kapitaal van € 5 000 wordt op een spaarrekening geplaatst tegen een rentevoet van 2,5 %. Na een half jaar neemt men het geld terug op. Hoeveel zal men uitbetaald worden?”

Bij het oplossen zal men in de formule I = k.i.t spontaan de letters vervangen door de in de opgave aangegeven waarden. De letters functioneren hier als ‘bepaalde waarden’, die weliswaar van situatie tot situatie verschillend kunnen zijn. De formule staat wel model voor telkens dezelfde berekening.
Karakteristiek voor een dergelijk gebruik van formules is dat

- ze meestal meer dan een letter bevatten, die meestal op een of andere wijze verbonden zijn met de context,
- de geëxpliciteerde verbanden vaak lineair zijn (vertolking van recht evenredigheid) of uit omgekeerd evenredigheid voortkomen,
- er weinig tekens in voorkomen,
- en vaak machten hebben met kleine en positieve exponenten.

Ook in de leersituatie met formules kunnen leerlingen de overstap maken naar *onbekenden* of *veranderlijken*.

> *Voorbeeld*
> In het voornoemde interestvraagstuk is I de ‘onbekende’. Maar de situatie is zo evident dat dit nauwelijks opgemerkt wordt.

De idee van onbekende wordt gemakkelijker gezien als we de vraag zouden stellen naar een bepaalde rentevoet om een vooropgezette interest te bekomen. Dan is i de onbekende, en leidt de formule tot een “vergelijking”.
Het begrip veranderlijke komt tot uiting als we bijvoorbeeld zouden vragen naar een tabel van de interesten bij verschillende beleggingstijden: t wordt dan veranderlijke.

Enigszins vertrouwd vanuit de basisschool is het *herkennen van patronen en regelmaat*. Leerlingen kunnen hierbij bijvoorbeeld een volgende, of enkele volgenden in een rij vinden (op basis van gegeven getallen of meetkundige patronen). Het stapje verder dat hierbij kan gezet worden is het op zoek gaan naar een formule om de algemene situatie te beschrijven.

> *Voorbeeld*
> Beschouwen we hier enkele eenvoudige voorbeelden:
> 2, 5, 8, 11, …
> of 2, 6, 12, 20, …
> Het is al snel duidelijk dat de volgenden in de rij respectievelijk 14, 17, … en 30, 42, 56, … zijn.
> Een algemene formule voor het eerste voorbeeld is snel gevonden: bij elke stap wordt 3 bijgeteld bij het vorige.
> Algemeen: 2 plus 3 keer het aantal stappen, en dat laatste is dan 1 minder dan het rijnummer.
> Dat leidt in formulevorm tot 2 + 3.(n-1) of na enig rekenwerk 3.n-1. Wiskundig sterkere leerlingen

hebben dat mogelijk zelfs al in een keer vastgesteld.
Het omzetten van het tweede voorbeeld naar formulevorm is wellicht moeilijker voor leerlingen, omdat de regelmaat eerder opvalt in zijn recursieve vorm: voorgaande plus 2 keer het plaatsnummer. En ze beschikken niet over technieken van rijen om hier helderheid in te brengen.
Met enige getallenkennis ziet men echter vlot de rij 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, … staan.
De algemene term is dan vlot te schrijven als $n.(n + 1)$ of $n^2 + n$.

In deze formules is n duidelijk een veranderlijke, die alle waarden kan aannemen van een gegeven verzameling, hier in principe $\mathbb{N}$. Men zou bijvoorbeeld de rij kunnen beperken tot 20 termen (dan behoort n tot {1, 2, 3, …, 20}).

Ook tabellen, eventueel opgesteld op basis van een gegeven grafiek, kunnen leiden tot het opstellen van formules. Meteen wordt een belangrijke stap in het denken duidelijk. Wil het algebraïsche rekenarsenaal goed functioneren in betekenisvolle situaties, dan zal ook ruimte moeten gemaakt worden voor het *opstellen van de relatie* tussen grootheden, gegeven getallen … Het algebraïsch rekenen zou op zichzelf kunnen functioneren, maar heeft maar zin in combinatie met het gebruik ervan bij het oplossen van problemen. Er moet dus veel aandacht besteed worden aan het onder algebra brengen van situaties. Onderdelen zoals veralgemenen van patronen, grafieken, tabellen en diagrammen bieden hiervoor uitgelezen kansen.

Letters in veralgemeningen

Een bijzondere vorm van formules is die van *de formalisering van definities en eigenschappen*. Deze vorm van wiskunde is vanuit de basisschool zo goed als onbekend bij de leerlingen.
Ze kennen eigenschappen vanuit het geven van voorbeelden (en het ontbreken ervan vanuit tegenvoorbeelden).

De commutativiteit (wisseleigenschap) van de optelling wordt geïllustreerd met concrete *voorbeelden* als

$3 + 14 = 14 + 3$

$23 + 56 = 56 + 23$

3,25 + 4,72 = 4,72 + 3,25, bijv. in een situatie zoals 3,25 + 4,72 + 14,75

De lettervorm $a + b = b + a$ is wellicht onbekend.
In de eerste leerfase zijn a en b in deze formule *plaatshouders* voor *bepaalde* getallen. Het is belangrijk dat leerlingen voldoende keren de weg van formule naar voorbeeld doorlopen, m.a.w. van formule overgaan op getallenvoorbeelden. De letter moet gaan functioneren als *gegeneraliseerd getal*, en eigenlijk als *onbepaald getal* dat op elk ogenblik kan geconcretiseerd worden door er een bepaald getal voor in te vullen.

Andere *voorbeelden* van dit gebruik in het verdere curriculum (bijvoorbeeld tweede leerjaar): $a^2 . a^3 = a^5$

$2^a . 2^b = 2^{a+b}$

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Nog drie bedenkingen hierbij.

- Bij voorbeelden als $2a + 3a = 5a$ wordt vaak als goedbedoelde ondersteunende concretisering gegeven dat “twee appels en drie appels samen toch vijf appels” zijn. Voorgaande uitleg toont dat men zich hiermee op het allerlaagste begripsniveau bevindt, veraf van de abstractie die men beoogt. Deze concretiseringen werken een goede begripsvorming dus niet in de hand, omdat de leerling bij de letters dan vaak aan concrete “dingen” blijft denken. Vaak merkt men al aarzeling bij de leerlingen als $2a + 3a = 5a$ wat verderop plots staat voor “twee peren en drie peren …”. Het voorgaande toont dat het letterbegrip in deze situatie precies naar ‘onbepaaldheid’ (gegeneraliseerd getal) leidt. De leerling moet precies de concrete dingen overstijgen. De weg via getalwaarden ligt hier voor de hand.

- Uitdrukkingen zoals a + b = b + a zijn weer uitspraakvormen.
  - De vervanging van a en b door getallen leidt tot een ware uitspraak.
  - Binding kan ook door kwantificering, in het bijzonder met de al-kwantoren. Uit het voorgaande is duidelijk dat de leerlingen alleszins inzicht moeten verwerven in een *vorm van algemeenheid* bij deze formule.

    In een aantal gevallen is het zinvol om deze algemeenheid vorm te geven in de formule zelf (door gebruik van de al-kwantor). Dat geldt misschien nog sterker als op die algemeenheid een beperking zou gelden (bijvoorbeeld dat een deler verschillend van nul moet zijn). Ervaring leert dat niet alle leerlingen dergelijke formalisering met kwantoren aankunnen. Het leidt vaak tot een stuntelig wiskundig taalgebruik zowel mondeling als formeel. Een prematuur gebruik van te formele taal brengt eerder schade toe aan het vlotte taalgebruik. Daarom is het slechts zinvol leerlingen daarmee te confronteren als ze gaan voor een doorstroming met sterke wiskunde.

- Over het algemeen gebruikt men letters voor getallen. In het tweede jaar worden leerlingen geconfronteerd met een stap verder. De rekenregels en formules die gelden voor getallen worden ook van toepassing voor algebraïsche uitdrukkingen. Bijzonder in trek daarbij zijn formules als $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. (Merk op dat weinigen onder ons hier de behoefte voelen deze formule te gaan kwantificeren in deze situatie.) De letters a en b worden achtereenvolgens eentermen, tweetermen … En als kers op de taart van de verwarring worden a en b ook nog lettervormen in a en b zelf?

  Merk op dat leerlingen dit bewust als een uitbreiding, als een verdere abstractie moeten ervaren binnen het wiskundige systeem. Op die wijze krijgen ze ook inzicht in hoe het systeem op zich wordt opgebouwd. Dat brengt hen op een wiskundig hoger beheersingsniveau. Belangrijk is echter te beseffen dat voor een goede abstractie de lager gelegen beheersingsniveaus voldoende moeten bereikt zijn, anders werkt die stap alleen maar totaal zinloos functioneren van het algebra-apparaat in de hand, met een onvoorstelbaar arsenaal aan onbegrijpelijke fouten tot gevolg.

Letters als veranderlijke

In het voorgaande zijn al een aantal leersituaties aangegeven waarbij het begrip *veranderlijke* kan ontstaan, vanuit een onbekende in een vergelijking, vanuit formules. We voegen hieraan nog twee situaties toe.

> *Voorbeeld*
> “In een winkel kosten balpennen € 4 per stuk, vulpotloden € 3 per stuk. Hoeveel balpennen en potloden kan ik voor € 40 kopen?” Het vraagstuk leidt gemakkelijk tot de vergelijking $4.b + 3.v = 40$. Deze vergelijking heeft een aantal oplossingen: (1,12); (4, 8) en (7, 4). De letters in de vergelijking staan dus niet meer voor één bepaalde waarde, maar voor enkele getallen. De letters kunnen een veranderlijke waarde aannemen.

Naast het begrip (bepaalde) onbekende in vergelijkingen en onbepaalde in veralgemeende eigenschappen moeten de leerlingen het begrip veranderlijke verwerven.
Doorheen het werken met formules, zoals bij veralgemeningen, of bij het oplossen van problemen ontstaan de begrippen eenterm en veelterm.
Zie de voorbeelden p.4 $3.n – 1$, $n.(n + 1)$ of $n^2 + n$
Ook deze uitdrukkingen krijgen een geabstraheerde wiskundige betekenis en gaan een eigen abstract leven leiden.

Voor vervolgstudies met een wiskundige onderbouw is een vaardigheid in het werken met algebraïsche uitdrukkingen noodzakelijk. Nadat mathematisering geleid heeft tot nieuwe uitdrukkingen, is het te verantwoorden een beperkte training op te zetten om hiermee vlot te kunnen omgaan. Wel geldt hier hetzelfde inzicht als voor het rekenen met getallen. We beschikken in de praktijk al over voldoende software om relatief ingewikkelde uitdrukkingen te manipuleren, vaardigheid betekent dus vlotheid in relatief eenvoudige situaties. Alleszins zullen de leerlingen het in dergelijke situaties veel gemakkelijker verwerven dan in overdreven complexe situaties. Leerlingen die in het hoger onderwijs andere technieken nodig hebben, zullen tegen die tijd ruim de mogelijkheid hebben die te verwerven. De leerfase in het begin, en voor alle leerlingen nog in dezelfde basisvorming, hoeft daardoor niet gehypothekeerd te worden. Vandaar dat het algebraïsche rekenwerk zonder problemen kan beperkt worden tot het rekenen met veeltermen in één veranderlijke en eentermen met maximaal twee veranderlijken.

Uit syllabus 2 Letterrekenen, 2005, *Actualisering leerplan wiskunde 1ste graad A-stroom* VVKSO D/1997/0279/032

Bijlage 2: Doorstroming basisonderwijs – 1ste graad secundair onderwijs Getallenleer en Meetkunde

Dit document werd gebruikt bij de voorstelling van het nieuwe leerplan 1ste graad A in 2008-2009 en wordt door de vakbegeleider wiskunde op vraag ter beschikking gesteld.

Leeswijzer voor dit document:

- In de eerste twee kolommen vind je de doelstellingen van het leerplan basisonderwijs.
  Licht gekleurd is wat reeds in het 4de en/of 5de leerjaar van het basisonderwijs aangebracht werd.
  Donker gekleurd zijn de doelstellingen die nieuw zijn in het 6de leerjaar.

- In kolom 3 en 4 vind je de aansluitende doelstellingen in het eerste leerjaar A van het secundair onderwijs.
  In de kolommen 5 en 6 ten slotte staan de aansluitende doelstellingen van het tweede leerjaar van het secundair onderwijs.
  Donker gekleurd zijn de doelstellingen die opnieuw aangebracht worden in de 1ste graad en licht gekleurd zijn de doelstellingen die doorlopen in de 1ste graad.

Bijlage 3: Discussietekst: Aanzet tot een document van parate kennis en vaardigheden wiskunde 1ste graad

Dit document werd gebruikt bij de voorstelling van het nieuwe leerplan 1ste graad A in 2008-2009 en wordt door de vakbegeleider wiskunde op vraag ter beschikking gesteld.

Bijlage 4: Wat kennen en kunnen alle leerlingen op het einde van de 1ste graad?

Vaardigheden

De doelstellingen van vaardigheden en attitudes zijn dezelfde gebleven. De didactische wenken die daarbij aansluiten zijn sterker uitgewerkt. Deze geven middelen en methoden aan om een en ander beter na te streven.

Alle leerlingen die uit de eerste graad A-stroom komen, hebben volgende vaardigheden ontwikkeld:

Probleemoplossende vaardigheden het gebruik van heuristiek, zoals: - een opgave herformuleren; - een goede schets of een aangepast schema maken; - onbekenden kiezen; - eenvoudige voorbeelden analyseren.
Rekenvaardigheden - het vlot rekenen met getallen (hoofdrekenen, cijferrekenen, rekenen met een rekenmachine, schatten); - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen; - het rekenen met algebraïsche vormen.
Meet- en tekenvaardigheden - het meten van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken; - het tekenen met behulp van geodriehoek en passer; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren, diagrammen en grafieken.
Wiskundige taalvaardigheden - het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen in eenvoudige situaties (zowel mondeling als schriftelijk); - het begrijpen van tekeningen, grafieken en diagrammen; - het uitdrukken van hun gedachten en hun inzicht in eenvoudige situaties (zowel mondeling als schriftelijk).
Denk- en redeneervaardigheden - het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen; - het begrijpen van een gegeven eenvoudige redenering of argumentatie bij een eigenschap; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het onderzoeken van een vermoeden en bij het opbouwen van een redenering.
Leervaardigheden - het verwerken van losse gegevens; - het verwerken van samenhangende informatie; - het raadplegen van informatiebronnen; - het inzetten van hulpmiddelen en van ICT-middelen; - het plannen van de studietijd; - het sturen van het eigen leerproces.

Attitudes

Alle leerlingen die uit de eerste graad A-stroom komen, hebben volgende attitudes ontwikkeld:

Zin voor nauwkeurigheid en orde
Zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik
Kritische zin: - een kritische houding tegenover het gebruik van cijfermateriaal, tabellen, berekeningen en grafische voorstellingen; - een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, verwoordingen, beweringen, handelingen…; - het besef dat in wiskunde niet enkel het eindresultaat belangrijk is, maar ook het inzicht in de werkwijze waarmee het antwoord bekomen wordt.
Zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen bij het aanpakken van problemen
Zelfregulatie
Zin voor samenwerking en overleg

Leerinhouden

Onderstaande lijst is een opsomming van te realiseren leerplandoelen, eventueel met vermelding van het basisbeheersingsniveau (B) waarop deze behandeld moeten zijn. Het verdiepingsniveau (V) wordt nagestreefd voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat het niet voor iedereen haalbaar is. In het leerplan worden ook doelstellingen geformuleerd als uitbreiding (U). Het gaat om een extra leerinhoud, bovenop de normale leerinhouden, maar die niet noodzakelijk is als onderbouw voor het vervolg.

Eerste leerjaar

GETALLENLEER		
GETALLEN EN BEWERKINGEN MET GETALLEN BETEKENISVOL GEBRUIKEN BIJ HET OPLOSSEN VAN PROBLEMEN		
G1	Natuurlijke, gehele en rationale getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	
G2	Bewerkingen met getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	
G3	Vraagstukken in verband met betekenisvolle situaties oplossen.	
G4	Procentberekeningen in zinvolle contexten gebruiken.	
G5	Gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen aflezen en interpreteren.	
	B	Vragen beantwoorden in verband met gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen.
	V	Zelf vragen stellen in verband met gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen en die vragen beantwoorden.
G6	Cijfergegevens aanschouwelijk voorstellen, onder andere door middel van diagrammen en grafieken.	
G7	Van een reeks getallen uit tabellen het rekenkundige gemiddelde en de mediaan bepalen en in de context interpreteren.	
G8	Bewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) uitvoeren met getallen (natuurlijke, gehele en rationale getallen)	
	B	- Rekenen met gehele getallen, maximum vijf termen en/of factoren. - Rekenen met rationale getallen in decimale vorm, maximum vijf termen en/of factoren. - Rekenen met rationale getallen in breukvorm met gebruik van een rekenmachine. - Rekenen met rationale getallen in breukvorm met eenvoudige noemers, maximum vijf termen en/of factoren.
G9	Afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toepassen.	
	B	Afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toepassen bij het berekenen van een uitdrukking met gehele en rationale getallen met maximaal vijf termen en/of factoren.
G10	De tekenregels bij gehele en rationale getallen toepassen.	
G11	Handig rekenen door gebruik te maken van het inzicht in getallen en in eigenschappen van de bewerkingen.	
G12	Het hoofdrekenen integreren in het schatten van resultaten.	
G13	Een rekenmachine doelgericht gebruiken.	
G14	Het resultaat van een berekening op een verantwoorde wijze afronden.	
G15	Delers en veelvouden van een natuurlijk getal bepalen.	
	V	Natuurlijke getallen ontbinden in priemfactoren met beperking tot de factoren 2, 3, 5, 7 en 11.

G16		De deelbaarheid van getal door een getal kleiner dan 10 onderzoeken.
	V	Eigenschappen in verband met de deelbaarheid in verband met som en veelvoud verwoorden en toepassen.
	U	De kenmerken van deelbaarheid door 2, 3, 4, 5, 9 door voorbeelden verklaren.
G17		De grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen.
	V	De grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen voor getallen die te ontbinden zijn met factoren 2, 3, 5, 7 en 11.
G18		Machten met een natuurlijke exponent van een getal berekenen.
	B	Machten van een rationaal getal in breukvorm berekenen.
G19		Letters gebruiken als onbekenden.
G20		In eenvoudige patronen en schema's regelmaat ontdekken en met formules beschrijven.
G21		Letters gebruiken als middel om te veralgemenen.
	B	Eigenschappen noteren in lettervorm en ze verwoorden.
	V	Eigenschappen noteren in lettervorm met universele kwantor en ze verwoorden.
G22		Vergelijkingen van de vorm $x + a = b$ en $a \cdot x = b$ met $a \in \mathbb{Q}_0$ en $b \in \mathbb{Q}$ oplossen.
G23		Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de vormen $x + a = b$ en $a \cdot x = b$.
	B	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.
	V	Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.
G24		Getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.
G25		De relatieve waarde van een cijfer in de decimale vorm van een rationaal getal aangeven.
	U	In concrete, eenvoudige situaties de voorstelling van een getal in binaire en /of hexadecimale schrijfwijze begrijpen en verwoorden.
	U	De ontwikkeling van het plaatswaardesysteem illustreren met voorbeelden uit de geschiedenis of uit andere culturen.
G26		Een breukvorm van een rationaal getal omzetten in de decimale vorm.
	B	De periode bepalen van een decimale vorm, als de periode maximaal twee cijfers telt en als de decimale ontwikkeling wordt bepaald met behulp van een rekenmachine.
	U	Het begrip periode van een decimale vorm verklaren
G27		Rationale getallen met een begrensde decimale vorm in breukvorm schrijven.
	B	Een decimaal getal omzetten in breukvorm.
	U	De breukvorm bepalen van een repeterende decimale vorm.
G28		Het verband tussen aftrekken en optellen en tussen delen en vermenigvuldigen verwoorden.
G29		De absolute waarde, het tegengestelde en het omgekeerde van een getal bepalen.
	V	De rol van 0 en 1 bij de bewerkingen verwoorden
G30		De betekenis van de commutativiteit en de associativiteit van de optelling en de vermenigvuldiging correct verwoorden.
	B	De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking met rationale getallen verwoorden met behulp van letterformules.
	V	De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking met rationale getallen verwoorden met behulp van letterformules en de universele kwantor.
G31		De betekenis van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling correct verwoorden.
	B	De eigenschap van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling bij rationale getallen verwoorden met behulp van een letterformule.
	V	De eigenschap van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling bij rationale getallen verwoorden met behulp van een letterformule en de universele kwantor.
G32		Gekende wiskundige symbolen correct gebruiken en verwoorden.
	V	De symbolen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ gebruiken als verkorte notatie voor de bedoelde verzamelingen.
	V	De betekenis van de uitdrukking ‘voor alle’ uitleggen en het symbool $\forall$ gebruiken als verkorte schrijfwijze.
G33		De symbolen =,≠,≤, ≥, <, > correct gebruiken en verwoorden.

<table>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>G34</td><td colspan="2">Terminologie in verband met absolute waarde, tegengestelde en omgekeerde van een getal correct gebruiken.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G35</td><td colspan="2">Terminologie in verband met bewerkingen met getallen correct gebruiken:
- optelling, som, term;
- aftrekking, verschil;
- vermenigvuldiging, product, factor;
- deling, quotiënt, deeltal, deler, rest.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Terminologie correct gebruiken: priemgetal.</td></tr>
<tr><td>G36</td><td colspan="2">Terminologie in verband met de machtsverheffing correct gebruiken:
- macht, grondtal, exponent;
- kwadraat, vierkantswortel.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEETKUNDE</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEETKUNDIGE KENNIS EN VAARDIGHEDEN GEBRUIKEN OM RUIMTELIJKE EN VLAKKE SITUATIES TE MODELLEREN</td></tr>
<tr><td rowspan="3">M1</td><td colspan="2">Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken en daarbij meetkundige concepten en relaties voorstellen en verwoorden.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>- Een schets maken bij een vlakke situatie.
- Een schets maken bij een eenvoudige, concrete ruimtelijke situatie.
- Het terugkeerpatroon in figuren onderzoeken, verwoorden en argumenteren.
- Meetkundige concepten en relaties illustreren met betekenisvolle voorbeelden uit de leefomgeving.
- Meetkundige concepten en relaties illustreren met betekenisvolle voorbeelden uit wetenschappen, techniek en kunst.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Het gebruik van meetkundige concepten en relaties argumenteren als ze gebruikt of toegepast worden in concrete situaties.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEETKUNDIGE CONCEPTEN ONTWIKKELEN, HERKENNEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN</td></tr>
<tr><td>M2</td><td colspan="2">Terminologie in verband met meetkundige begrippen gebruiken:
- vlak, punt, rechte;
- lijnstuk, halfrechte;
- lengte, afstand, hoek.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M3</td><td colspan="2">De afstand van een punt tot een rechte bepalen.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>De afstand van een punt tot een rechte definiëren.</td></tr>
<tr><td>M4</td><td colspan="2">Zijde, diagonaal en hoek van een vlakke figuur herkennen en gebruiken in toepassingen.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M5</td><td colspan="2">Straal, middellijn, koorde en middelpuntshoek van een cirkel herkennen en gebruiken in toepassingen.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Straal, middellijn, koorde en middelpuntshoek in een cirkel definiëren.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M6</td><td colspan="2">De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek herkennen en gebruiken in toepassingen.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek definiëren.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M7</td><td colspan="2">Een hoogtelijn en een zwaartelijn van een driehoek herkennen en gebruiken in toepassingen.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Een hoogtelijn en een zwaartelijn van een driehoek definiëren.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEETKUNDIGE RELATIES HERKENNEN, ONDERZOEKEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN</td></tr>
<tr><td>M8</td><td colspan="2">In het vlak
- evenwijdige en snijdende rechten herkennen en het symbool // correct gebruiken;
- loodrechte rechten herkennen en het symbool $\perp$ correct gebruiken.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M9</td><td colspan="2">In de ruimte evenwijdige en snijdende rechten herkennen.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Op een ruimtefiguur kruisende rechten herkennen.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M10</td><td colspan="2">Eigenschappen verwoorden in verband met evenwijdigheid en loodrechte stand van rechten in het vlak.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Eigenschappen onderzoeken en verwoorden in verband met bijzondere lijnen in driehoeken en vierhoeken.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">M11</td><td colspan="2">Punten in het vlak bepalen door middel van coördinaten.</td></tr>
<tr><td>V</td><td>Punten in de ruimte bepalen door middel van coördinaten.</td></tr>
<tr><td colspan="3">MEET- EN TEKENVAARDIGHEID ONTWIKKELEN</td></tr>
<tr><td>M12</td><td colspan="2">Een afstand meten met een gewenste nauwkeurigheid en hierbij geschikte eenheden en instrumenten kiezen.</td></tr>
<tr><td>M13</td><td colspan="2">Een lijnstuk tekenen tot op een millimeter nauwkeurig.</td></tr>
<tr><td>M14</td><td colspan="2">Een lijnstuk tekenen dat dezelfde lengte heeft als een gegeven lijnstuk.</td></tr>
</table>

M15	Een hoek meten tot op een graad nauwkeurig.	
	V	De onderverdelingen van de graad gebruiken.
	V	In praktische situaties de som van zestigdelige hoekmaten berekenen.
M16	Een hoek tekenen waarvan de grootte in graden gegeven is.	
M17	Een hoek tekenen met dezelfde hoekgrootte als een gegeven hoek.	
M18	Een evenwijdige rechte met en een loodrechte op een gegeven rechte tekenen met behulp van een geodriehoek.	
M19	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek tekenen met behulp van een geodriehoek.	
M20	Middelloodlijnen, bissectrices, hoogtelijnen en zwaartelijnen in een driehoek tekenen met behulp van een geodriehoek.	
VORMKENMERKEN VAN RUIMTELIJKE EN VLAKKE FIGUREN HERKENNEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN		
M21	Vlakke situaties, in het bijzonder driehoek, vierhoek en cirkel, herkennen in ruimtelijke situaties.	
	B	Vlakke figuren herkennen in de diagonaalvlakken van een kubus en een balk en deze figuur tekenen (op ware grootte of op schaal).
	V	Vlakke figuren herkennen in een vlakke doorsnede van ruimtefiguren en deze figuur tekenen (op ware grootte of op schaal).
M22	Verschillende soorten driehoeken definiëren.	
M23	Verschillende soorten vierhoeken definiëren.	
M24	Driehoeken en vierhoeken tekenen die aan gegeven voorwaarden voldoen.	
	V	Een driehoek, een vierhoek tekenen bepaald door een beperkt aantal elementen.
M25	Aan de hand van een schets of een tekening een kubus, een balk, een recht prisma en een cilinder herkennen.	
M26	Een balk en een kubus voorstellen.	
	V	Een kubus, een balk en een recht prisma voorstellen in een perspectieftekening (bijv. cavalièreperspectief of isometrisch perspectief).
M27	Een ontwikkeling van een kubus en een balk tekenen.	
	U	Een ontwikkeling van een cilinder en een recht prisma tekenen.
M28	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen verschillende aanzichten tekenen.	
	V	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen en voorgesteld in een vlakke tekening, verschillende aanzichten tekenen.
PROBLEMEN OPLOSSEN IN VERBAND MET LENGTE, OPPERVLAKTE EN VOLUME		
M29	Vraagstukken oplossen waarbij meetkundekennis gebruikt wordt.	
M30	Vraagstukken oplossen waarbij het begrip schaal gebruikt wordt.	
	B	De schaal bij een gegeven figuur aflezen en in ware grootte gemeten lengten omrekenen naar de voorstelling op schaal.
	V	Schaal in verschillende notatievormen weergeven, en vlot van notatievorm veranderen.
M31	Vraagstukken over de omtrek en de oppervlakte van een driehoek, een vierhoek en een cirkel oplossen.	
	B	De formules voor de oppervlakte van een driehoek, een vierkant, een rechthoek en een parallellogram kennen en toepassen in vraagstukken.
	V	Een strategie ontwikkelen om de oppervlakte te berekenen van een samengestelde figuur en een onregelmatige figuur en die berekening uitvoeren.
M32	Vraagstukken over de oppervlakte en het volume van een kubus, een balk en een cilinder oplossen.	
	B	De formules voor de oppervlakte en het volume van een kubus, een balk en een cilinder kennen en toepassen in vraagstukken.
	U	Vraagstukken over de oppervlakte en het volume van een recht prisma oplossen.
	U	Een strategie ontwikkelen om de oppervlakte te berekenen van een samengestelde figuur en een onregelmatige figuur en die berekening uitvoeren.
M33	Technieken van schatten gebruiken om lengte, oppervlakte en volume te schatten en die techniek gebruiken als controle van resultaten.	

GETALLENLEER		
RELATIES TUSSEN GETALLEN EN BEWERKINGEN MET GETALLEN BETEKENISVOL GEBRUIKEN BIJ HET OPLOSSEN VAN PROBLEMEN		
G37	Vaardig rekenen met rationale getallen bij het oplossen van problemen.	
	B	Vlot rekenen met eenvoudige getallen.
G38	Machten van getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	
	V	De decimale vorm van een getal omzetten in de wetenschappelijke schrijfwijze en omgekeerd.
	U	Rekenen met getallen die geschreven zijn in de wetenschappelijke schrijfwijze.
G39	Vraagstukken in verband met betekenisvolle situaties oplossen.	
	B	Vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.
	B	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.
G40	Het recht evenredig en omgekeerd evenredig zijn van twee grootheden herkennen in het dagelijkse leven en in tabellen.	
G41	Vraagstukken oplossen waarbij recht evenredige en omgekeerd evenredige grootheden aan bod komen.	
G42	Recht evenredige verbanden tussen grootheden grafisch voorstellen.	
	U	Bij recht evenredige grootheden, gegeven met een grafiek of een tabel, een tussenliggende waarde berekenen (interpoleren) of een verderliggende waarde berekenen (extrapoleren).
G43	Gegeven strook- en schijfdiagrammen aflezen en interpreteren.	
	B	Vragen beantwoorden in verband met gegeven strook- of schijfdiagrammen.
	V	Zelf vragen stellen in verband met een gegeven strook- of schijfdiagram en die vragen beantwoorden.
	U	In eenvoudige situaties numerieke gegevens in een strook- of een schijfdiagram weergeven.
BEWERKINGEN MET GETALLEN VLOT EN CORRECT UITVOEREN		
G44	Machten met een gehele exponent berekenen.	
	B	Machten met een gehele exponent definiëren.
G45	Regels voor het rekenen met machten toepassen.	
	B	- Regels voor het rekenen met machten met grondtal 10 en 2 formuleren en toepassen. - Regels voor het rekenen met machten formuleren en toepassen.
	V	Regels voor het rekenen met machten in symbolen weergeven en verklaren.
	V	Regels voor het rekenen met machten gebruiken bij machten met letterexponenten.
REKENEN MET LETTERVORMEN EN FORMULES, VERGELIJKINGEN OPLOSSEN		
G46	Een recht evenredig verband uitgedrukt in een tabel met een formule uitdrukken.	
	V	Een omgekeerd evenredig verband uitgedrukt in een tabel met een formule weergeven.
G47	Vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende oplossen.	
	V	Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.
	V	Eigenschappen in verband met gelijkheden onderzoeken en formuleren.
G48	Vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.	
	B	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.
	V	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule door de formule om te vormen, door ze op te lossen naar een veranderlijke.
G49	De getalwaarde van een veelterm met ten hoogste drie termen berekenen.	
	B	De getalwaarde van een veelterm in twee letters met ten hoogste drie termen berekenen.
G50	Een-, twee- en drietermen optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.	
	B	Twee- en drietermen in één letter optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.
	V	Twee- en drietermen in twee letters optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.
	V	Twee- en drietermen in één letter en met eenvoudige letterexponenten optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.
	V	Het quotiënt van twee eentermen berekenen

G51	Machten met een natuurlijke exponent van een eenterm berekenen.	
	V	Machten met een natuurlijke exponent berekenen van eentermen met ten hoogste twee letters en waarin letterexponenten voorkomen.
G52	De formules voor de merkwaardige producten $(a+b)^2$ en $(a+b)(a-b)$ kennen, verklaren en toepassen.	
	V	De formules voor de merkwaardige producten toepassen voor vormen waarbij a en b eentermen zijn met ten hoogste twee letters.
	V	De formules voor merkwaardige producten toepassen voor vormen waarin machten met letterexponenten voorkomen.
G53	Eenvoudige veeltermen ontbinden in factoren door gebruik te maken van: - de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling; - de formules voor de merkwaardige producten $(a+b)(a-b)$ en $(a+b)^2$.	
	V	De formules voor het ontbinden in factoren toepassen voor vormen waarbij a en b eentermen zijn met ten hoogste twee letters.
	V	De formules voor het ontbinden in factoren toepassen voor vormen met machten waarin letterexponenten voorkomen.
DE SAMENHANG TUSSEN GETALLEN EN GETALLENVOORSTELLINGEN VERWOORDEN EN GEBRUIKEN		
G54	De hoofdeigenschap van evenredigheden formuleren en toepassen.	
WISKUNDIGE TERMINOLOGIE BEGRIJPEN EN CORRECT GEBRUIKEN		
G55	Terminologie in verband met machten correct gebruiken: Macht, grondtal, exponent.	
BEWERINGEN ARGUMENTEREN		
G56	Beweringen, antwoorden en oplossingen argumenteren vanuit eigenschappen.	
	V	De regels voor het rekenen met machten met natuurlijke exponent argumenteren.
	V	De hoofdeigenschap van evenredigheden argumenteren
MEETKUNDE		
MEETKUNDIGE KENNIS EN VAARDIGHEDEN GEBRUIKEN OM RUIMTELIJKE EN VLAKKE SITUATIES TE MODELLEREN		
M34	Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken en daarbij meetkundige concepten en relaties voorstellen en verwoorden.	
MEETKUNDIGE CONCEPTEN ONTWIKKELEN, HERKENNEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN		
M35	In het vlak figuren herkennen die het beeld zijn van een gegeven figuur door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.	
	V	In het vlak figuren herkennen die het beeld zijn van een gegeven figuur door een puntspiegeling.
M36	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling en een draaiing verwoorden.	
	V	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling, een draaiing verklaren door ze te illustreren met voorbeelden.
	U	Een verschuiving, een spiegeling, een draaiing definiëren als transformatie van het vlak.
M37	Het complement en het supplement van een hoek bepalen.	
	B	- Een complementaire hoek en een supplementaire hoek van een gegeven hoek tekenen. - De grootte van het complement en het supplement van een gegeven hoek bepalen.
M38	Overstaande hoeken, aanliggende hoeken en nevenhoeken herkennen in vlakke situaties.	
M39	De eigenschappen van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verwoorden (en verklaren).	
	B	De omgekeerde van de eigenschap verwoorden.
	V	De omgekeerde van de eigenschap verklaren.
M40	Symmetrieassen en symmetriemiddelpunten in vlakke figuren bepalen.	

MEETKUNDIGE RELATIES HERKENNEN, ONDERZOEKEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN		
M41	Congruente figuren herkennen.	
M42	De congruentiekenmerken van driehoeken formuleren en illustreren door tekening.	
	U	De congruentie van twee figuren illustreren door aan te geven door welke verschuiving, spiegeling of draaiing de ene figuur een beeld is van de andere.
M43	Gelijkvormige figuren herkennen.	
M44	Het verband leggen tussen gelijkvormigheid van figuren en het begrip schaal.	
M45	Het kenmerk van de middelloodlijn van een lijnstuk verwoorden.	
M46	Het kenmerk van de bissectrices van een paar snijdende rechten verwoorden.	
MEET- EN TEKENVAARDIGHEID ONTWIKKELEN		
M47	Het beeld van een vlakke figuur tekenen door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.	
	V	Het beeld van een vlakke figuur bepalen door een puntspiegeling.
M48	Met behulp van passer een hoek construeren waarvan de hoekgrootte gelijk is aan die van een gegeven hoek, en de werkwijze verklaren met congruentiekenmerken.	
M49	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek construeren met behulp van de passer.	
M50	Driehoeken en vierhoeken construeren die aan gegeven voorwaarden voldoen.	
EIGENSCHAPPEN VAN RUIMTELIJKE EN VLAKKE FIGUREN HERKENNEN, VERWOORDEN EN GEBRUIKEN		
M51	Eigenschappen in verband met zijden en hoeken in een driehoek verwoorden (en bewijzen).	
	B	- De eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek verwoorden en bewijzen. - De eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek verwoorden en bewijzen. - De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verwoorden. - Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek verwoorden.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.
	V	De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verklaren.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek bewijzen.
M52	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant verwoorden (en bewijzen).	
	B	- De eigenschap van de som van de hoeken van een vierhoek verwoorden en bewijzen. - Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken verwoorden. - Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek verwoorden.
	V	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant bewijzen.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek bewijzen.
M53	Driehoeken en vierhoeken classificeren aan de hand van eigenschappen.	
	B	Driehoeken en vierhoeken classificeren op basis van de eigenschappen van zijden en hoeken. Vierhoeken classificeren op basis van de eigenschappen van hun diagonalen.
	V	Driehoeken en vierhoeken classificeren op basis van het aantal symmetrieassen.
M54	Zich vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur.	
M55	Aangeven welke informatie verloren gaat in een tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale situatie.	
	B	Aangeven welke informatie verloren is gegaan in een perspectieftekening, een projectietekening van een driedimensionale situatie.
	U	Aangeven welke informatie verloren is gegaan in een tweedimensionale voorstelling met aanzichten van een driedimensionale situatie.
M56	Aan de hand van een schets of een tekening een kegel, een piramide en een bol herkennen.	

VAARDIGHEID ONTWIKKELEN IN HET ARGUMENTEREN EN BEWIJZEN VAN BEWERINGEN		
M57	Vaardigheid ontwikkelen in het argumenteren van beweringen.	
	B	- De eigenschappen van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verklaren. - De eigenschap van de middelloodlijn van een lijnstuk bewijzen. - De eigenschap van de bissectrices van een paar snijdende rechten bewijzen. - De eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek en van een vierhoek bewijzen. - De eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.
	V	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling, een draaiing verklaren door ze te illustreren op voorbeelden.
	V	De constructie van een hoek waarvan de hoekgrootte gelijk is aan die van een gegeven hoek verklaren met congruentiekenmerken.
	V	De omgekeerde (eigenschap) van de eigenschap van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verklaren.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de middelloodlijn bewijzen.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de bissectrices van een paar snijdende rechten bewijzen.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.
	V	De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verklaren.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek bewijzen.
	V	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant bewijzen.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek bewijzen.
PROBLEMEN OPLOSSEN IN VERBAND MET LENGTE, OPPERVLAKTE EN VOLUME		
M58	Vraagstukken oplossen waarbij meetkundekennis gebruikt wordt.	
	B	Technieken van schatten gebruiken om lengte, oppervlakte en volume te schatten en die technieken gebruiken als controle van resultaten.
	U	Vraagstukken in verband met het volume van een kegel, een piramide en een bol oplossen.